Séance 3 : puissances de 10 et écriture scientifique, 3ème partie

V Chiffres significatifs et calcul approché

Chiffres significatifs :

En mathématiques, le résultat d'un calcul s'écrit en général sous forme exacte.

En physique, le résultat d'un calcul s'écrit sous forme d'un nombre décimal arrondi rendant compte de la précision des mesures. Le nombre de chiffres significatifs (CS) rend compte de cette précision. **Il est égal au nombre de chiffres de ce nombre sans compter tous les zéros à gauche de l'écriture de ce nombre** (mais en comptant ceux à droite ou intercalés entre d'autres chiffres). Peu importe notamment la place de la virgule.

Exemple : un physicien écrit 2,0 cm, indiquant ainsi qu'il a une précision au mm alors qu'un mathématicien écrit simplement 2 cm.

Exercice 7a : Donner le nombre de CS des nombres suivants

A = 3,098 B= 0,000980 C= $0,007805.10^{2}$ D = $3200,007.10^{-2}$

Lors d'un calcul, le physicien va faire attention à donner un résultat qui ne soit pas plus précis que les données dont il se sert pour le calculer. En effet, partir de quelque chose de peu précis dont on se sert dans un calcul ne peut qu'aboutir à quelque chose de peu précis.

Addition/soustraction et chiffres significatifs :

Le résultat d'une addition/soustraction sera donné à l'unité, au dixième, au centième…suivant la précision de la donnée la moins précise.

Multiplication/division et chiffres significatifs :

Le nombre de chiffres significatifs du résultat est celui de la grandeur qui en possède le moins.

Attention : un nombre entier intervenant dans une ″formule de calcul″ est considéré comme ayant un nombre de chiffres significatifs infini (exemple : périmètre d'un cercle $p = 2\pi R$ - Seul R limite la précision du résultat).

Méthode pour donner le bon nombre de CS lors d'un calcul

- Commencer par les opérations les plus internes (celles qu'on commence à faire lors des calculs) pour terminer par les plus externes mais sans arrondis avant le résultat final
- Pour les multiplications et divisions, trouver la donnée la moins précise, relever son nombre de CS, faire l'opération et penser que le résultat aura ce nombre de CS.
- Pour une addition ou une soustraction, regarder le rang le plus précis de chacun des termes (attention aux puissances de 10) et retenir celui qui est le rang le plus grand (le moins précis) pour l'opération finale.
- Donner le résultat tel que le fournirait un mathématicien
- Donner le résultat tel que le donnerait un physicien en ne surtout pas oubliant, dans le calcul de la fin, de mettre le bon nombre de CS avec un éventuel arrondi le cas échéant.

Exercice 7b : Ecrire les nombres suivants en écriture scientifique avec 2 chiffres significatifs :

305 ≈ …………….. 0,021 ≈ ………………. $\frac{1}{8}$ ≈ ………………

$0,25.10^{2}$ ≈ …………… 1040 ≈ …………………. $4,05.10^{-3}$ ≈ …………

0,00605 ≈ …………… 0,010 ≈ ……………… 13.10^{-6} ≈…………..

Exercice 8 :

1) Effectuer les calculs suivants en respectant le nombre de chiffres significatifs :

a = 25,3 + 12 + 3,6 ≈ ……………… b = $0,063 + 2,5.10^{-1}$ ≈ …………………..

c = 126 - 32,1 ≈……………… d = 0,36 - 0,211 ≈ ………… e = 3,87 - 2 ≈ ……..

f = 4,00×25 ≈ ……………. g = $\frac{2,0.10^{-1}\times 6,00.10^{2}}{10^{3}}$ ≈ ……………

2) Effectuer chacun des calculs suivants. Indiquer la forme décimale du mathématicien du résultat puis l'écriture scientifique correspondante du physicien en respectant le nombre de chiffres significatifs. Puis donner son ordre de grandeur.

B' = $\frac{\left(5\times 10^{-3}\right)^{2}}{-0,4\times\left(10^{2}\right)^{-3}}$ C = $\frac{\left(15\times 10^{-4}\right)\left(4,5\times 10^{6}\right)}{2,7\times 10^{-2}}$ D = $\frac{1,4\times 10^{4}+4,9\times 10^{-1}}{7,0\times 10^{3}}$

Les grosses bêtises à ne pas faire à l'issue de la séance 3 sur quelques exemples :

- Dire que 2.10^5 a 3 CS. (En effet, il ne faut pas prendre en compte la puissance de 10 dans le nb de CS d'un nombre.)
- Oublier l'arrondi le cas échéant dans le résultat final
- Faire des arrondis en cours de route (l'arrondi ne vient qu'à la toute fin du calcul)

A l'issue de la séance 2 :

- Je connais tous les points des séances précédentes
- Je sais déterminer le nombre de CS d'un nombre quelconque sans me tromper dans les 0.
- J'ai compris que la virgule n'a aucune importance pour la détermination du nombre de CS.
- J'ai compris le lien entre CS et précision d'un résultat
- J'ai compris l'importance donnée au CS pour le physicien
- Je connais les règles des CS pour une addition/soustraction
- Je connais les règles des CS pour une multiplication/division
- Je sais trouver le nombre de CS pour un calcul mêlant les 4 opérations
- Je sais que je commence toujours par donner le nombre tel que le donnerait un mathématicien pour ensuite donner la valeur en prenant compte des CS
- Je sais que dans une formule, les nombres exacts comme 2 dans $2\pi R$ ont une précision infinie donc un nb de CS infini en toute rigueur (2,00000000000000 avec une infinité de zéro) et donc ne sont pas source d'imprécision et ne rentrent pas en compte pour déterminer le nombre de CS du résultat final.

A l'issue de la séance 2, pour la semaine suivante

- je refais les exercices des séances précédentes notamment ceux sur lesquels je me suis trompé ou que je n'ai pas terminés. Je ne regarde la correction qu'après et je m'auto-corrige.
- Je continue de lister sur une feuille <u>toutes</u> les erreurs que j'ai commises lors des exercices et pour chacune d'elles, j'explique quelle faute a été faite et ce que je dois faire la prochaine fois pour ne plus jamais la commettre.
- Je résous le problème de Fermi suivant :
  Si tous les hommes se donnaient la main, pourraient-ils faire le tour de la Terre ?

Correction

Exercice 7a : 4 CS ; 3 CS ; 4 CS ; 7 CS

Exercice 7b : Ecrire les nombres suivants en écriture scientifique avec 2 chiffres significatifs :
En physique on utilise un signe "égal" et non pas "environ égal" dans le résultat tenant compte des chiffres significatifs.

$305 = 3{,}05\times10^2 \approx \mathbf{3{,}1\times10^2}$ $0{,}021 \approx \mathbf{2{,}1\times10^{-2}}$ $\frac{1}{8} = 0{,}125 \approx \mathbf{1{,}3\times10^{-1}}$

$0{,}25.10^2 \approx \mathbf{25}$ $1040 \approx \mathbf{1{,}0\times10^3}$ $4{,}05.10^{-3} \approx \mathbf{4{,}1\times10^{-3}}$

$0{,}00605 \approx \mathbf{6{,}1\times10^{-3}}$ $0{,}010 \approx \mathbf{1{,}0\times10^{-2}}$ $13.10^{-6} \approx \mathbf{1{,}3.10^{-5}}$

Exercice 8 :
1) Effectuer les calculs suivants en respectant le nombre de chiffres significatifs :

$25{,}3 + 12 + 3{,}6 = 40{,}9 \approx \mathbf{41}$ (précision à l'unité)

$0{,}063 + 2{,}5.10^{-1} = (0{,}63+2{,}5)\times10^{-1} = 3{,}13.10^{-1} \approx \mathbf{3{,}1.10^{-1}}$ (précision au 100ème)

$126 - 32{,}1 \approx \mathbf{94}$ $0{,}36 - 0{,}211 = 0{,}149 \approx \mathbf{0{,}15}$ $3{,}87 - 2 \approx \mathbf{2}$

$4{,}00\times25 = \mathbf{1{,}0\times10^2}$ (2cs) $\frac{2{,}0.10^{-1}\times6{,}00.10^2}{10^3} = 12.10^{-2} = \mathbf{1{,}2.10^{-1}}$ (2cs)

2) Effectuer chacun des calculs suivants. Indiquer la forme décimale et l'écriture scientifique du résultat en respectant le nombre de chiffres significatifs, puis donner son ordre de grandeur.

$$B' = \frac{\left(5\times10^{-3}\right)^2}{-0{,}4\times(10^2)^{-3}} = -\frac{25\times10^{-6}}{4\times10^{-1}\times10^{-6}} = -\frac{25}{4}\times10 = -0{,}25\times25\times10$$

$B' = -2{,}5\times25 = \mathbf{-62{,}5}$

En écriture décimale :
Pour un mathématicien : B' = - 62,5
Pour un physicien : B' = - 60 (bof) car le résultat doit avoir 1 cs (ici on "voit" 2 cs au lieu d'un mais on ne peut pas faire autrement) plutôt -6.10^1
Ordre de grandeur : $B' \approx 10^2$

$$C = \frac{\left(15\times10^{-4}\right)\left(4{,}5\times10^{6}\right)}{2{,}7\times10^{-2}} = \frac{15\times45\times10^1}{27\times10^{-3}} = \frac{3\times5\times5\times9\times10^1}{3\times9\times10^{-3}} = 25\times10^4$$

$C = \mathbf{2{,}5\times10^5}$
En écriture décimale :
C = 250 000 pour un mathématicien
(Rq : un physicien n'utilisera pas l'écriture décimale car elle ne rend pas compte des chiffres significatifs et donne l'impression de 6cs)
En écriture scientifique, en tenant compte des cs : $C = 2{,}5.10^5$
Ordre de grandeur : $C \approx 10^5$

$$D = \frac{1{,}4\times10^4+4{,}9\times10^{-1}}{7{,}0\times10^3} = \frac{14\times10^3}{7\times10^3} + \frac{49\times10^{-2}}{7\times10^3} = \mathbf{2+7\times10^{-5}}$$

En écriture décimale :
Pour un mathématicien : D = 2,00007
Pour un physicien : D = 2,0 car le résultat doit avoir 2 cs
En écriture scientifique, en tenant compte des cs : D = 2,0
Ordre de grandeur : $D \approx 1$