Séance 6 : fractions, racines, puissances, 1ère partie

I Fractions

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul, $\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire de ce nombre rationnel. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

1) Égalité

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$

c'est à dire : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$ et si $ad = bc$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2) Simplification

Soient a, b et k trois entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$, $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$

Pour simplifier une fraction on divise le numérateur et le dénominateur par un entier relatif non nul.

Exemple : $\frac{72}{27} = \frac{9\times8}{9\times3} = \frac{8}{3}$.

3) Addition et soustraction

Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $c \neq 0$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Pour additionner ou soustraire deux fractions ayant même dénominateur, on additionne ou soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur commun

Exemple : $\frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Lorsque les dénominateurs sont différents on réduit au même dénominateur.

Exemple : $\frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{10}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$.

4) Multiplication et division

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple : $\frac{26}{5} \times \frac{10}{13} = \frac{26\times10}{5\times13} = \frac{2\times13\times5\times2}{5\times13} = 4$

Pour diviser par un nombre rationnel non nul on multiplie par son inverse. Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs tels que $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemple : $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$

Cas particulier : pour diviser par l'entier relatif non nul b on multiplie par $\frac{1}{b}$.

Exemple : $\frac{3}{7} \div 2 = \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$. Le signe $\div$ ne sera plus jamais employé dorénavant. On utilisera des barres de fraction.

Il faut faire très attention à l'écriture : A = $\frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{3\times2} = \frac{5}{6}$ et B = $\frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{5\times2}{3} = \frac{10}{3}$.

5) Fraction irréductible

Soit a un entier relatif et soit b un entier naturel tel que $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible si a et b n'ont pas de diviseur positif commun autre que 1(on ne peut pas simplifier)

Exercice 1 :

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$A = 2 + \frac{3}{5} + \frac{7}{2}$; $B = 1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{25}$; $C = \frac{2,5}{3} - \frac{4}{5}$; $D = -3(\frac{1}{14} - \frac{2}{21})$ $E = (\frac{2}{9} + \frac{5}{6})(\frac{3}{4} - \frac{7}{10})$;

$F = (\frac{3}{5} - \frac{1}{4})(\frac{4}{5} - \frac{3}{8})$; $G = (\frac{7}{8} - \frac{3}{2}) \div (\frac{5}{9} - \frac{7}{12})$; $H = \frac{3+\frac{1}{4}}{7+\frac{2}{7}}$; $I = \frac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}}$

$J = (1 - \frac{3}{5})(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2})$; $K = \frac{2}{7} \times (-13) \times \frac{21}{8} \times \frac{16}{39} \times \frac{5}{6}$; $L = \frac{3}{\frac{4}{5}}$; $M = \frac{\frac{3}{4}}{5}$; $N = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{21}}$

Exercice 2 :

Ordonner les nombres suivants sans faire de calculs :

1) $\frac{-3}{7}, \frac{4}{7}\, et\, \frac{9}{7}$ 2) $\frac{-3}{8}, \frac{3}{7}\, et\, \frac{3}{11}$ 3) $\frac{-1}{60}, \frac{1}{30}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{6}\, et - \frac{1}{4}$

Exercice 3 :

On considère l'axe gradué d'origine O, tel que 1 cm représente une unité. L'abscisse d'un point sur cet axe correspond au nombre réel positif ou négatif dont le point occupe la position sur l'axe.

a et b sont deux nombres réels non nuls tels que $a < 0$ et $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{6}$.

Le point A d'abscisse a s'appelle « point objet » et le point B d'abscisse b se nomme « point image ». Enfin le point C d'abscisse 6 est le « foyer », il est fixe.

1. Lorsque cela est possible, calculer b et placer les points A, B et C sur un axe dans les cas suivants :

   a) $a = -3$ b) $a = -6$ c) $a = -2$ d) $a = -4$ e) $a = -10$ f) $a = -12$

2. Que penser de la position du point « image » B sur l'axe lorsque le point « objet » A vérifie :

   a) $-6 < a < 0$? b) $a < -6$? On pourra établir préalablement que : $b = \frac{6a}{a+6} = \frac{6}{1+\frac{6}{a}} = \frac{a}{1+\frac{a}{6}}$

3. Est-il possible que le point B se situe entre A et C?

Les grosses bêtises à ne pas faire à l'issue de la séance 6 sur quelques exemples :

- Faire une addition/soustraction de fractions en ajoutant/soustrayant les numérateurs et les dénominateurs : c'est une ***erreur très grave***. Exemple : 1/3 + 1/6 = 2/6+1/6 = (2+1)/6 = 3/6 = ½ alors que 1/(3+6) = 1/9 !! Apprendre par cœur cet exemple
- Ne pas savoir rapidement simplifier une fraction : réapprendre ses tables et les maîtriser
- Oublier le signe d'une fraction, oublier que toute fraction négative est plus petite qu'une fraction positive.
- Attention à ne pas oublier de se représenter une fraction (qui est une division) : par exemple 2/5 et 2/12 : tout de suite savoir les ordonner en se représentant mentalement (sans calcul) la division correspondante.

A l'issue de la séance 6 :

- Je connais tous les points des séances précédentes.
- Je connais les définitions d'une somme, différence, produit et quotient de deux fractions. Je sais faire les calculs.
- Je sais que $\frac{\frac{5}{3}}{2}$ est différent de $\frac{5}{\frac{3}{2}}$ et j'y prends garde. Sur ma copie, cela ne doit pas être ambigüe.
- Je sais que diviser par b revient à multiplier par 1/b et vice-et-versa. Je sais appliquer ce résultat. De même b = b/1 !
- Je connais la définition d'une fraction irréductible.
- Je sais mettre une fraction sous sa forme irréductible en simplifiant cette fraction.

A l'issue de la séance 6, pour la semaine suivante

- Je refais les interrogations rendues si ce n'est déjà fait.
- je (re)fais les exercices des séances notamment ceux sur lesquels je me suis trompé ou que je n'ai pas terminés. Je ne regarde la correction qu'après et je m'auto-corrige.
- Je continue de lister sur une feuille <u>toutes</u> les erreurs que j'ai commises lors des exercices ou interrogations et pour chacune d'elles, j'explique quelle faute a été faite et ce que je dois faire la prochaine fois pour ne plus jamais la commettre.

CORRECTION

RACINES CARRES

Exercice 1:

$\sqrt{7^2} = \mathbf{7}$

$\left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = \mathbf{12}$

$-2\sqrt{3^2} = -2 \times 3 = \mathbf{-6}$

$\sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{3} = \sqrt{6 \times 8 \times 3} = \sqrt{2 \times 3 \times 8 \times 3} = \sqrt{4^2 \times 3^2} = \sqrt{12^2} = \mathbf{12}$

$\sqrt{10^4} = \sqrt{100^2} = \mathbf{100}$

$\sqrt{25 \times 10^8} = \sqrt{25} \times \sqrt{10^8} = \mathbf{5 \times 10^4 = 50000}$

$\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$

$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = \mathbf{1}$

Exercice 2:

$A = \sqrt{28} - 3\sqrt{63} + 6\sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 9\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = -\sqrt{\mathbf{7}}$

$B = \sqrt{27} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 2\sqrt{75} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 10\sqrt{3} = \mathbf{12\sqrt{3}}$

$C = \sqrt{\frac{8 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 3}} = \sqrt{\frac{7}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \mathbf{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\mathbf{7}}$

$D = \left(\sqrt{2} + 4\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 8\sqrt{10} = 2 + 80 + 8\sqrt{10} = \mathbf{82 + 8\sqrt{10}}$

$E = (2\sqrt{3} - 1)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 1 - 4\sqrt{3} = 12 + 1 - 4\sqrt{3} = \mathbf{13 - 4\sqrt{3}}$

Exercice 3 :

$\frac{5}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

$\frac{2}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{\left(1 - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{-1 - \sqrt{3}}$

$\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6} + 2}{1} = \mathbf{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$

$\frac{\sqrt{7} + 1}{2\sqrt{7} - 1} = \frac{\left(\sqrt{7} + 1\right)\left(2\sqrt{7} + 1\right)}{\left(2\sqrt{7} - 1\right)\left(2\sqrt{7} + 1\right)} = \frac{14 + \sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 1}{28 - 1} = \frac{15 + 3\sqrt{7}}{27} = \mathbf{\frac{5 + \sqrt{7}}{9}}$

$\frac{5 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} + \frac{4 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(1 + \sqrt{5}\right) + \left(4 - \sqrt{5}\right)\left(1 - \sqrt{5}\right)}{\left(1 - \sqrt{5}\right)\left(1 + \sqrt{5}\right)} = \frac{10 + 6\sqrt{5} + 9 - 5\sqrt{5}}{-4}$

$\frac{5 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} + \frac{4 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{19 + \sqrt{5}}{-4} = -\mathbf{\frac{19 + \sqrt{5}}{4}}$

PUISSANCE D'UN REEL

Exercice 1:

$$\text{A} = \frac{(-15)^3 \times 49^2}{-3^2 \times (-35)^4} = \frac{-15^3 \times 49^2}{-3^2 \times 35^4} = \frac{15^3 \times 49^2}{3^2 \times 35^4} = 3^3 \times 5^3 \times 7^4 \times 3^{-2} \times 5^{-4} \times 7^{-4} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

A est donc un nombre strictement positif.

$$A = \frac{28^{-2} \times (-49)^2}{(-20)^{-2}} = \frac{28^{-2} \times 49^2}{20^{-2}} = 4^{-2} \times 7^{-2} \times 7^4 \times 4^2 \times 5^2 = 7^2 \times 5^2 = \mathbf{1225}$$

A est donc un nombre strictement positif

$$[(\frac{-2}{3})^2]^3 \times (\frac{3}{5})^{-2} \times (\frac{-4}{9})^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \left(-\left(\frac{9}{4}\right)^3\right) = -2^6 \times 3^{-6} \times 5^2 \times 3^{-2} \times 3^6 \times 2^{-6}$$

$= -\mathbf{\frac{25}{9}}$ est donc strictement négatif

Exercice 2:

$(a^4 b^{-2})^{-3} = \boldsymbol{a^{-12} b^6}$

$\dfrac{a^5 b^3 c^2}{a b^{-2} c^4} = \boldsymbol{a^4 b^5 c^{-2}}$

$\dfrac{(a^2 b)^5 a c^{-2}}{(-a)^7 (b^2 c)^2} = -a^{10} \mathrm{b}^5 a c^{-2} a^{-7} b^{-4} c^{-2} = \boldsymbol{-a^4 b c^{-4}}$

$\dfrac{a^5 (b^3 c)^2}{(a b^2)^3 c} \div \dfrac{a (b^{-1} c^{-2})^2}{(a^2 b)^{-1} c^{-3}} = \dfrac{a^5 b^6 c^2}{a^3 b^6 \mathrm{c}} \times \dfrac{a^{-2} b^{-1} c^{-3}}{\mathrm{a} b^{-2} \mathrm{c}^{-4}} = \dfrac{a^3 b^5 c^{-1}}{a^4 b^4 \mathrm{c}^{-3}} = \boldsymbol{a^{-1} b c^2}$