Séance 3 : proportions-pourcentages, $2^{ème}$ partie

2) « Prendre r % d'une quantité »

1) Prendre r% d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par $\frac{r}{100}$

Exemples : * j'ai 48 billes et j'en perds 25 % ; j'en ai donc perdu 48 x 25 / 100 = 12.

* j'ai un poids de 65 kg et je dois boire une masse égale à 2,8 % de mon poids chaque jour. La masse d'eau journalière à boire est donc de 65 x 2,8 / 100 = 1,82 kg (soit 1,82 L d'eau)

2) Prendre r% d'une quantité, puis prendre s% du résultat, c'est multiplier la quantité initiale par $\frac{r}{100} \times \frac{s}{100}$

Exemple : * sur les 2,5 kg de pommes achetées, 20 % me servent à faire de la compote et j'utilise 75 % de cette compote pour tapisser un fond de tarte. La masse de pomme qui a servi à faire le fond de tarte est donc de :

2,5 x (20/100) x (75/100) = 0,375 kg

3) Cas de l'évolution d'une grandeur

Lorsqu'on a une grandeur qui augmente ou qui diminue selon une certaine proportion, on a les définitions et propriétés immédiates suivantes :

3) p désigne un nombre strictement positif. On considère une grandeur qui vaut V_0 initialement. Augmenter la grandeur de p % correspond à calculer la nouvelle valeur V_1 de cette grandeur en sommant l'ancienne valeur V_0 de cette grandeur à laquelle on rajoute l'augmentation $V_0 \times \frac{p}{100}$,

$$V_1 = V_0 + V_0 \times \frac{p}{100}$$

On peut mettre V_0 en facteur et donc cela revient à multiplier cette grandeur par $(1 + \frac{p}{100})$ appelé coefficient multiplicatif ou multiplicateur noté CM

$$V_1 = V_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = V_0 \times CM \quad \text{(par cœur)}$$

Il faut savoir retrouver V_0 si on connait V_1 et p

$V_1 = V_0(1 + \frac{p}{100})$ donc $V_0 = \frac{V_1}{(1+\frac{p}{100})}$(toujours refaire le calcul rapidement, ne pas apprendre par cœur la formule) :

Il faut savoir retrouver $\frac{p}{100}$ (l'augmentation) connaissant V_0 et V_1 (toujours refaire le calcul) :

$V_1 = V_0(1 + \frac{p}{100})$ donc $CM = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{V_1}{V_0}$ soit $1 + \frac{p}{100} = \frac{V_1}{V_0}$ et donc $\frac{p}{100} = \frac{V_1}{V_0} - 1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{augmentation}{valeur\ initiale}$

Exemples : * un salaire de 2100 euros a augmenté de 2,2 %. Quelle est sa nouvelle valeur ?

On écrit donc tout de suite que le nouveau salaire $s_1 = s_0$ x 1,022 en faisant l'opération $\left(1 + \frac{2,2}{100}\right) = 1 + 0,022 = 1,022$ dans sa tête. On trouve 2146,2 euros.

* Une action vaut 76,3 dollars après une augmentation de 3,4 %. Quelle est son ancienne valeur ? Attention !!! Cela ne signifie absolument pas qu'il faille diminuer de 3,4 % la nouvelle valeur ! C'est une division qu'il faut faire, par le CM. Ici 76,3 dollars est la nouvelle valeur notée v_1. Son ancienne valeur v_0 vaut donc $v_0 = \frac{v_1}{1,034}$ soit 73,79 dollars.

* J'ai acheté un manteau à 154 euros alors que l'année dernière il était à 134 euros. Quelle a été l'augmentation, en pourcentage, sur l'année ?

$\frac{p}{100} = \frac{augmentation}{valeur\ initiale} = \frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{154-134}{154} = 0,13 = \frac{13}{100}$ Le manteau a augmenté de 13%.

4) t désigne un nombre strictement positif inférieur à 100. On considère une grandeur qui vaut V_0 initialement Diminuer une grandeur de t % revient à la multiplier par $(1 - \frac{t}{100})$ appelé coefficient multiplicatif ou multiplicateur noté CM

$$V_1 = V_0\left(1 - \frac{t}{100}\right) = V_0 \times CM \quad \text{(par cœur)}$$

De la même façon, il faut savoir retrouver V_0 et $\frac{t}{100}$ rapidement (refaire les calculs à chaque fois, ne pas apprendre par cœur) :

$$V_0 = \frac{V_1}{(1 - \frac{t}{100})} = \frac{V_1}{CM}$$

$$\frac{t}{100} = 1 - \frac{V_1}{V_0} = \frac{V_0 - V_1}{V_0} = \frac{diminution}{valeur\ initiale}$$

Exemples : * une voiture à 12 500 euros à l'achat a perdu 15 % de sa valeur au bout de 6 mois. Quelle est sa nouvelle valeur ?

v_1 la nouvelle valeur et v_0 l'ancienne, $v_1 = v_0 \times 0,85$ (car dans sa tête on a fait rapidement $\left(1 - \frac{15}{100}\right) = 1 - 0,15 = 0,85$). On trouve 10 625 euros.

* Après une baisse de 70 %, une nappe vaut 12 euros. Quel était l'ancien prix ?

Attention !!! Cela ne signifie absolument pas qu'il faille augmenter 12 euros de 70 % pour retrouver l'ancien prix. Il ne faut pas faire une addition pour retrouver l'ancien prix mais une division par le CM. Ici, 12 euros est le nouveau pris p_1. L'ancien prix p_0 vaut donc $p_0 = \frac{p_1}{0,30}$ (car dans sa tête on fait rapidement $\left(1 - \frac{70}{100}\right) = 1 - 0,70 = 0,30$)

* Avec le froid, une tige de fer est passée de 103,3 cm de long à 102,7 cm de long. Quel a été le pourcentage de diminution de la longueur de cette tige ?

$\frac{t}{100} = \frac{diminution}{valeur\ initiale} = \frac{x_0 - x_1}{x_0} = \frac{103,3 - 102,7}{103,3} = 0,0058$ donc une diminution de 0,58% en longueur.

5) Appliquer deux (ou trois…) pourcentages d'évolution successifs à une grandeur A, revient à multiplier successivement A par les deux (ou trois…) coefficients multiplicatifs correspondants.

Exemples : * Une montre à 30 euros a baissé de 20 % puis a augmenté de 20 %. Quel est son nouveau prix ?

Attention ! Ne surtout pas dire qu'elle n'a pas changé de prix car la baisse et l'augmentation ne sont pas relative à la même valeur. Baisse de 20 % donc $m_1 = 0,80\ m_0$ dans un premier temps. Puis augmentation de 20 % donc $m_2 = 1,20 \text{ x } m_1$. On écrit directement $m_2 = m_0 \text{ x } 0,80 \text{ x } 1,20 = m_0 \text{ x } 0,96$. La montre a donc baissé en fait de 4% Elle vaut 28,8 euros.

* Monsieur Hoche a placé 2000 euros sur son livret qui rapporte 2,5 % tous les ans, les intérêts se cumulant au fur et à mesure. Quelle somme a Monsieur Hoche au bout de 8 ans ?

Attention ! Il ne s'agit pas d'ajouter 8 fois 2,5 %. Ce sont toujours des multiplications qu'il faut faire (par $\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)$). Une puissance apparait :

$C_8 = C_0 \text{ x } (1,025) \text{ x } (1,025) \text{ x}(1,025) \text{ x } (1,025) \text{ x}(1,025) \text{ x } (1,025) \text{ x}(1,025) \text{ x } (1,025) = C_0 \text{ x } (1,025)^8 = 2436,8$ euros

Exercice 5 :

Recopier et compléter :

Augmenter de 35 % revient à multiplier par ………………

Réduire de 5 % revient à multiplier par ………………..

Un coefficient multiplicateur égal à 0,6 correspondant à une……………………de………… %.

Un coefficient multiplicateur égal à 1,7 correspondant à une……………………de………… %.

Un coefficient multiplicateur égal à 2,4 correspondant à une……………………de………… %.

Exercice 6 a :

Un article hors taxes (HT) coûte 50€. Sachant qu'il y a 16% de taxes, déterminer le prix Toutes Taxes Comprises (TTC) de cet article.

Exercice 6 b :

Après une hausse de 20%, un article coûte 96€. Quel était son prix avant augmentation ?

Exercice 7 :

L'action d'une grande banque a baissé de 15% il y a deux jours, puis a repris 15% hier. Est-elle revenue à son prix initial (avant baisse) ? SI non, de quel pourcentage a-t-elle baissé ou augmenté ?

Exercice 8 :

Commenter cette annonce d'un journaliste :

« Une nouvelle hausse de 15% sur le tabac interviendra le premier Septembre, et, ajoutée à la hausse de 10% survenue le premier mars, aura augmenté d'un quart le prix du paquet de cigarettes sur l'année ».

Exercice 9 :

1) Un article coûte 150€. Il subit une hausse de 4% suivie d'une hausse de 5%. Quel est son nouveau prix après les deux hausses successives ?

2) Après deux baisses successives de 5% et de 6%, le prix d'un produit est de 800€. Quel était son prix initial ?

Exercice 10 a :

Le cours d'une action a augmenté de 3% entre 9h et 10h, baissé de 2 % entre 10h et 11h et baissé de 1 % entre 11h et 12h. Calculer le pourcentage d'évolution du cours de l'action entre 9h et 12h. On pourra faire un schéma pour s'aider. Attention aux réponses hâtives fausses !

Exercice 10 b :

Le cours d'une action a globalement baissé de 2% entre 9h et 11h alors qu'il avait augmenté de 3% entre 9h et 10h. Calculer le pourcentage d'évolution du cours de l'action entre 10h et 11h. On pourra faire un schéma pour s'aider.

Exercice 11 :

Quelles sont les actions conduisant au même effet, concernant un prix initial donné :

- augmenter de 5% puis diminuer de 10%
- baisser de 5%
- diminuer de 5% puis augmenter de 10%
- diminuer de 10% puis augmenter de 5%

Exercice 12 :

Refaire, en tant que 11 nouveaux exercices, les 11 exemples résolus de cette 2ème partie de chapitre, en cachant complètement leur résolution et en vérifiant qu'il n'y a pas d'erreur commise par le professeur.

Les grosses bêtises à ne pas faire à l'issue de la séance 3, 2ème partie sur quelques exemples :

- Multiplier par p/100 une grandeur pour trouver sa valeur finale quand cela ne correspond qu'à l'augmentation. Il faut multiplier par (1+p/100)
- Idem pour la diminution
- Dire que si un objet a baissé de 20 %, alors pour retrouver l'ancien prix, il faut augmenter le nouveau de 20%. C'est en réalité toujours une division qu'il faut faire pour trouver l'ancien prix par le CM. Attention !!!
- Oublier que pour deux augmentations successives, on fait le produit en utilisant les deux coefficients multiplicatifs.
- Confondre le coefficient multiplicatif (1+p/100) ou (1-t/100) avec le pourcentage p ou t
- Ne pas voir immédiatement que (1-3/100) = 0,97 ou que (1+120/100) = 2,2… et vice-et-versa.
- Ne pas trouver immédiatement x quand par exemple (1-x/100) = 0,67 (x = 33 car x/100 = 1-0,67=0,33)

A l'issue de la séance 3, 2ème partie :

- Je connais tous les points des séances précédentes
- Je sais prendre r% d'une quantité
- Je sais prendre r% puis s% d'une quantité
- Je sais calculer la nouvelle valeur connaissant l'ancienne et le coefficient multiplicatif correspondant
- **Vice et versa** : connaissant les valeurs initiales et finales, je suis capable de retrouver les pourcentages d'augmentation ou de diminution et/ou les coefficients multiplicatifs associés. Bien s'entraîner.
- Je fais la différence entre valeur initiale, valeur finale, augmentation, diminution qui ont généralement des unités ; et coefficient multiplicatif et pourcentage de variation (d'augmentation ou de diminution) qui n'ont pas d'unité. Je fais la différence entre tous ces termes.
- Je sais appliquer ou utiliser les coefficients multiplicatifs « en cascade » quand il y a des diminutions ou des augmentations successives.
- Je sais faire des calculs mentaux rapides comme (1-3/100) = 0,97 ou (1+120/100) = 2,2
- Ou trouver x quand (1-x/100) = 0,67 (x = 33)
- Je sais bien présenter les calculs en nommant par exemple par v_0 et v_1 la valeur initiale et la valeur finale d'une grandeur.
- Je n'hésite pas à faire des schémas pour bien voir les différentes étapes permettant de passer d'une valeur initiale à une valeur finale, surtout s'il y en a plusieurs.