

# Mesure et incertitude, métrologie

Fiche n°

## I Notion d'erreurs

### 1) Introduction

En sciences expérimentales, il n'existe pas de mesures exactes : celles-ci sont toujours entachées d'erreurs plus ou moins importantes selon le protocole, la qualité des instruments de mesure ou le rôle de l'opérateur. Évaluer l'incertitude sur une mesure est souvent un processus complexe, mais il s'agit d'une étape essentielle dans la détermination de la valeur mesurée

Mesurer une grandeur, c'est rechercher une valeur de cette grandeur et lui associer une incertitude afin d'évaluer la qualité de la mesure.

### Définitions et notations :

- la grandeur à mesurer est appelée le **mesurande**. Exemple : la masse volumique de l'éthanol
- on appelle **mesurage** (mesure) l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur (on notera le résultat d'un mesurage)
- la **valeur vraie** ( ) du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue !
- L'**erreur de mesure** ( ) est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie. Par définition cette erreur est inconnue puisque la valeur vraie est inconnue !

### 2) Quelles sont les erreurs rencontrées lorsqu'on fait une mesure ?

#### a) Les erreurs de mesure systématiques

Les erreurs systématiques ont une valeur définie identique à chaque fois que l'on mesure la même grandeur, dans les mêmes conditions. Elles ont une origine bien précise (mais cette origine n'est pas toujours évidente à identifier).

L'erreur systématique peut être considérée comme une erreur « constante » qui affecte chacune des mesures.

- **Les erreurs instrumentales** : par exemple, une pipette peut délivrer un volume légèrement différent de ce qu'indique sa contenance si son utilisation est faite à une température très différente de la température d'étalonnage fait par l'industriel.
- **Les erreurs dues à la méthode** : ces erreurs sont plus difficiles à détecter et à corriger car elles dépendent du système étudié (qu'il soit chimique, physique, biologique etc.) et des hypothèses faites dans le choix de la méthode.
- **Les erreurs personnelles** : dues à un problème systématiquement le même de mesure de la part de l'expérimentateur (pour cause de problème de santé par exemple : daltonisme, astigmatisme etc.)

Cette erreur ne peut être réduite qu'en appliquant une correction. Par exemple, pour éviter une erreur systématique due à l'absorption de la cuve et du solvant lors d'une mesure de spectrophotométrie on effectue « un blanc ».

#### b) Les erreurs de mesure aléatoires

La valeur d'une grandeur expérimentale dépend toujours de nombreux facteurs que nous ne pouvons pas contrôler : ces facteurs sont appelés **grandeurs d'influences**. Ces grandeurs d'influence évoluent de manière aléatoire, ainsi si nous effectuons plusieurs fois la mesure du mesurande nous n'obtiendrons pas forcément la même valeur. Par exemple, une expérience consiste à faire croître une population de bactéries sur un support nutritif bien précis. On désire ensuite connaître la densité de ces bactéries exprimées en nombre de bactéries par millimètres carrés (pour une hauteur donnée de milieu nutritif). Pour cela, on fait croître la population sur un support nutritif de taille 5cm x 5cm constitué de minuscules compartiments de 1mm par 1mm. En utilisant un microscope on compte le nombre de bactéries par compartiment (donc par mm<sup>2</sup>). La simple présence d'une poussière initialement dans un des compartiments peut engendrer une différence d'un compartiment à l'autre. Ou le mélange nutritif n'est pas tout à fait homogène d'un compartiment à l'autre. Ou la température, ou la pression, ou la hauteur de milieu etc. Toutes ces sources engendrent des erreurs de mesure aléatoires dans le sens où, en moyenne, elles vont s'annuler...

### 3) Justesse et fidélité

Si l'on répète l'opération de mesure un grand nombre de fois ( fois) dans les mêmes conditions (conditions de répétabilité) :

Le meilleur estimateur de la valeur vraie est la valeur moyenne des mesures, noté :  $\bar{x}$

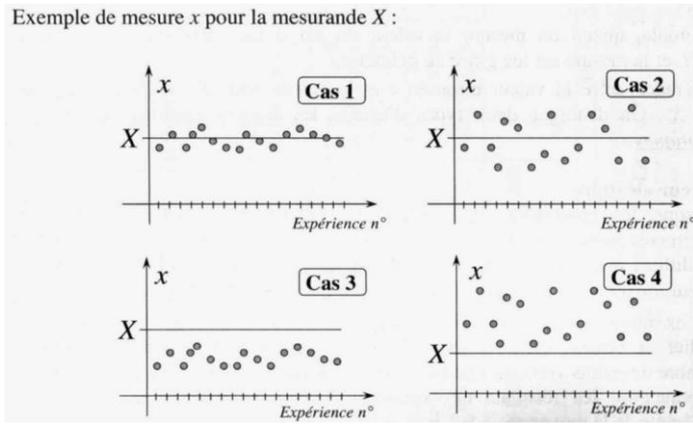
L'erreur systématique est la différence entre le meilleur estimateur de la valeur vraie et la valeur vraie :

Un instrument de mesure est d'autant plus **juste** que .....

L'erreur aléatoire pour chaque mesure notée est la différence entre cette mesure et la moyenne de toutes les mesures.

Un instrument de mesure est dit d'autant plus **fidèle** que ..... lors de mesures répétées.

Exemple de mesure  $x$  pour la mesurande  $X$  :



Pour les 4 cas ci-contre, qualifier l'instrument de mesure.

## II Notion d'incertitude et présentation du résultat

Les erreurs de mesure sont inévitables. Le résultat d'une mesure présente donc toujours une part d'incertitude. Il convient donc d'une part d'estimer la valeur vraie du mesurande et d'autre part d'estimer, à partir des mesures expérimentales, l'incertitude autour de cette valeur. Le résultat fait alors apparaître deux nombres : valeur qu'on estime la plus proche de la valeur vraie  $M_{vrai}$ . (c'est ce qu'on appelle le **meilleur estimateur de la grandeur mesurée, noté** ) ; il faut y ajouter une valeur qu'on estime la meilleure estimation de l'incertitude commise de part et d'autre de pour un niveau de confiance de  $p\%$ .

Pour un mesurande noté , le résultat d'un mesurage devra être noté :

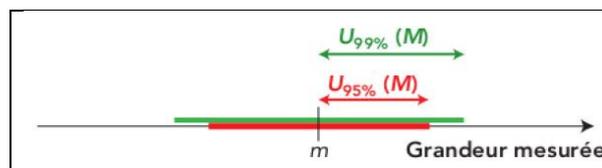
: le meilleur estimateur de la grandeur mesurée  
 : le meilleur estimateur de l'incertitude de mesure appelée **incertitude de mesure élargie** (la notation vient de l'anglais « uncertainty ») associé à un niveau de confiance .

### Signification :

Cette notation signifie que la valeur vraie a de chance se trouver dans l'intervalle :

Cette intervalle est appelé **intervalle de confiance**. On peut aussi utiliser la notation suivante pour le résultat d'un mesurage :

En général, la largeur de cet intervalle est choisie pour avoir ou de chance de trouver la valeur vraie à l'intérieur. Un niveau de confiance plus élevé correspondra pour un même mesurage à un intervalle plus ..... autour du meilleur estimateur.



**Figure 1** : Importance du choix du niveau de confiance

Attention ! Comment noter correctement le résultat d'une mesure ? (à savoir faire)

L'incertitude ne doit pas être donnée avec un nombre excessif de chiffres, à savoir : 1 ou 2 chiffres significatifs. En effet l'incertitude sur l'incertitude est assez importante : de l'ordre de 10-25 %. En général on ne garde qu'un seul chiffre significatif en arrondissant à la valeur supérieure (on préfère majorer l'incertitude que la minorer). Mais si en ne gardant qu'un seul chiffre l'arrondi entraîne une trop grande surestimation (plus de 10% de la valeur de l'incertitude) on garde deux chiffres. Une fois l'arrondi sur l'estimateur de l'incertitude effectué il faut supprimer les chiffres qui n'ont pas de sens sur l'estimateur de la grandeur : on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position que celui de l'incertitude gardée. On arrondira l'estimateur avec les règles usuelles.

### Exemples :

Mesure d'une résistance

et

Résultat à indiquer : .....

Mesure d'une concentration

et

, Résultat à indiquer : .....

Il ne reste plus , maintenant, qu'à correctement, à partir de mesures, :

- déterminer le meilleur estimateur de la grandeur mesurée

- déterminer le meilleur estimateur de l'erreur de mesure pour un intervalle de  $p\%$  choisi (càd l'incertitude de mesure élargie)

Cette science s'appelle la **métrologie**. Les résultats à utiliser sont fournis dans les paragraphes suivants.

### III Incertitude expérimentale par étude statistique de répétabilité (évaluation de type A)

Reprenons l'exemple des bactéries et de la mesure de la densité D de ces bactéries sur le milieu nutritif. En utilisant un microscope on compte le nombre de bactéries par compartiment sur vingt compartiments pris au hasard. On trouve les valeurs suivantes : 56, 57, 58, 58, 59, 59, 60, 60, 60, 61, 61, 61, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 64, 65.

#### 1) Rappels mathématiques

##### a) Moyenne d'une série de mesure

La valeur moyenne  $\bar{x}$  d'une série de mesure de la grandeur X est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$n$  : le nombre de mesures effectuées de la grandeur

$\bar{x}$  : le meilleur estimateur de

$x_i$  : les différentes valeurs mesurées pour la grandeur

$\bar{x}$  : la valeur moyenne des  $n$  mesures

##### b) Ecart type

L'écart-type expérimental des mesures de la grandeur X est donné par

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$s$  : écart-type expérimental des mesures (écart-type de répétabilité) dans la même unité que

$n$  : le nombre de mesure effectuée de la grandeur

$x_i$  : les différentes valeurs mesurées pour la grandeur

$\bar{x}$  : la valeur moyenne des  $n$  mesures

L'écart-type expérimental traduit la dispersion des valeurs expérimentales de la série autour de la moyenne.

##### c) Exemple

Déterminer la moyenne et l'écart-type expérimental correspondant à la série de mesures de D des bactéries. Il faut savoir utiliser les fonctionnalités de sa calculatrice.

—

#### 2) Meilleur estimateur de la grandeur mesurée

Logiquement, le meilleur estimateur est la valeur moyenne  $\bar{x}$  des mesures effectuées :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

#### 3) Meilleur estimateur de l'incertitude de mesure

Il s'agit d'estimer l'incertitude sur la moyenne. Plus le nombre  $n$  de mesures effectuées est grand et plus la moyenne  $\bar{x}$  se rapproche de la valeur vraie avec une incertitude faible. On introduit la grandeur qui va permettre d'obtenir une estimation de l'incertitude sur la valeur moyenne d'un échantillon.

Elle est appelée **incertitude-type** et notée  $s$ . Elle se calcule grâce à la formule suivante (qui peut se démontrer mathématiquement) :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$s$  : l'écart-type expérimental des mesures de l'échantillon de  $n$  mesures

$n$  : nombre de mesures effectuées

L'incertitude type ne prend pas en compte le degré de confiance qu'on décide d'obtenir pour l'incertitude de mesure (par exemple 60 % ou 99,5 %). On introduit alors un coefficient qui prend en compte à la fois le degré de confiance désiré et le nombre de mesures effectuées. Ce sont les facteurs d'élargissement de Student qui sont tabulés notés  $t_{(n-1)}$  (voir annexe) :

Pour un niveau de confiance à  $1-\alpha$ , on a l'estimateur  $U(X)$  de l'incertitude de mesure qui vaut :

#### 4) Conclusion

Il faut, au final, écrire le résultat sous la forme (avec un niveau de confiance choisi de 95 %):

$$\bar{x} \pm u \cdot s$$

Exemple : on cherche une distance  $d$  avec une confiance de 80 % et on trouve  $\bar{x} \pm u \cdot s$ . Cela signifie que

.....

Remarque : si  $n$  est très grand, on fera "l'approximation gaussienne ":

$$\bar{x} \pm u \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

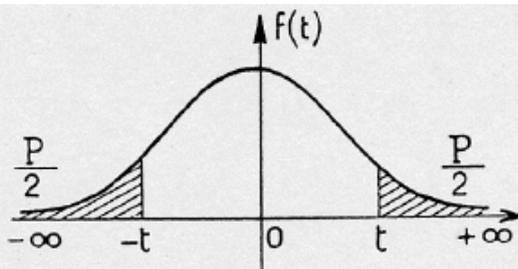
#### 5) Exemples

Déterminer la densité de bactérie avec le résultat obtenu des 20 mesures pour un intervalle de confiance de 60 %, 70 %, 80 %, 90 %, 95%, 98%, 99% et 99,9%

Annexe 1 : loi de Student

Coefficient de Student correspondant à la probabilité  $p$  d'être dépassée pour un nombre de degré de liberté  $v = n-1$  ( $n$  : nombre de mesure)

Ainsi, le coefficient de Student c'est le facteur d'élargissement pour un niveau de 80 % avec un échantillon de 14 mesures (et donc  $n-1$  degrés de liberté) se trouve en regardant la ligne  $14 - 1 = 13$  et la colonne  $1-80/100 = 0,20$ . On trouve 1,350.



$\begin{matrix} P \\ v \end{matrix}$	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
$\infty$	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291