

## Devoir pour le mardi 30 Mars 2010

Un devoir pour deux élèves.

Dans tout le devoir, on considèrera que les gouttes sont en chute libre.



Latone : les grenouilles et les paysans de Lucie

### I Préliminaires

On considère une goutte d'eau de masse  $m$  jaillissant d'une fontaine avec un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et une vitesse initiale  $v_0$ . La goutte évolue dans le plan  $(Oik)$  avec  $(O\vec{k})$  orienté vers le haut.

- 1) Le repère choisi est tel que les coordonnées initiales de la goutte soient  $x_0$  et  $z_0$ . Etablir les lois horaires  $x(t)$  et  $z(t)$ .
- 2) Montrer que la trajectoire est parabolique si  $\alpha$  est différent de  $90^\circ$ .
- 3) Comment se simplifient les équations dans le cas où l'origine du repère coïncide avec la position initiale du centre de la goutte ? On considèrera qu'il en est ainsi dorénavant.
- 4) On appelle flèche  $F$  la hauteur maximale atteinte par la goutte.

a) Montrer que  $F = v_0^2 * \frac{\sin^2(\alpha)}{2g}$ .

b) Montrer l'homogénéité de cette formule (un sin a toujours une dimension de 1) c'est à dire montrer que les deux membres de cette égalité ont même dimension en utilisant M (dimension d'une masse), L (dimension d'une longueur) et T (dimension d'un temps)

- 5) On appelle portée  $P$  du tir la distance séparant le point de lancement au sol de la goutte et le point d'impact quand la goutte retombe au sol.

Montrer que  $P = v_0^2 * \frac{\sin(2\alpha)}{g}$

- 6) Dans le cas où la goutte est éjectée verticalement (vers le haut), que vaut  $\alpha$  ? Comment se simplifient les expressions de  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $F$  et  $P$  ?

On utilisera dans les parties suivantes les résultats de cette première partie.

### II Bassin du dragon

Le dragon crache un jet vertical qui atteint la hauteur de la surface de l'eau dans les réservoirs prolongeant l'aile nord du château. Cette hauteur  $h_0$  vaut 27,0 m. C'est le jet le plus haut du parc.

- 1) Calculer la vitesse d'éjection de l'eau pour le jet central de ce bassin.
- 2) Calculer la durée que met une goutte pour retomber dans le bassin à partir de sa date d'éjection.

### III Bassin de Latone, bosquet des rocailles

La plateforme supérieure du bassin de Latone est formée de huit grenouilles crachant des jets qui passent au-dessus de la statue de Latone. Deux grenouilles se faisant vis-à-vis sont distantes de 4,00 m. L'angle de tir des jets est de  $75^\circ$ .

- 1) Calculer la valeur de la vitesse d'éjection des jets afin qu'un jet que crache une grenouille retombe sur la grenouille qui lui fait vis-à-vis.
- 2) Quelle doit être la hauteur maximale de la statue pour que les jets passent au-dessus d'elle ?
- 3) L'eau dégringole de margelle en margelle. Sachant que chaque margelle a une hauteur de 110 cm environ et que chaque goutte possède une vitesse  $v_0 = 1,0 \text{ m.s}^{-1}$  avec une direction horizontale quand elle quitte une margelle, déterminer le lieu où elle atterrit sur la margelle inférieure.

#### IV Bassin des saisons, d'Apollon, du parterre d'eau, du parterre du midi, du parterre de Latone

Ces bassins ont la caractéristique de présenter des gerbes en forme de fleurs de lys. Une gerbe est composée d'un jet central vertical et de jets jaillissant vers l'extérieur tout autour présentant un angle de lancement différent de  $90^\circ$ .

1) Pour une hauteur du jet central de 10,0 m, quelle doit être la valeur de la vitesse d'éjection ? Donner simplement le résultat.

2) Les jets autour ont même vitesse d'éjection que le jet central. Pour que la fleur de lys soit harmonieuse, il faut que la hauteur maximale atteinte par l'eau pour ces jets latéraux soit égale à  $6/10^{\text{ème}}$  de la hauteur du jet central. En déduire l'angle d'éjection pour ces jets latéraux.

#### V Parterre d'eau, bosquet de la girandole, bosquet de l'Encelade, bassin de Latone

On considère un jet avec une vitesse d'éjection fixe égale à  $v_0$ . On peut par contre faire varier l'angle de lancement  $\alpha$ .

Calculer la valeur que doit prendre  $\alpha$  afin d'obtenir une portée maximale. On rappelle qu'une fonction d'une variable admet un maximum pour une certaine valeur de cette variable si la dérivée de cette fonction s'annule en cette valeur.

Ce cas d'angle de lancement est rencontré pour les jets secondaires du parterre d'eau, pour ceux du bosquet de la girandole, pour les jets partant de la main gauche d'Encelade et pour de nombreux batraciens du bassin de Latone.



Latone : l'arche d'eau et les gerbes fleurdelisées



Le bassin des couronnes : paraboloïde de révolution