Mesures et incertitudes – Fiche 3 : Estimation de l'incertitude-type expérimentale sur une mesure (évaluation de type B)

Quelques rappels sur la notion d'incertitude de mesure et la présentation d'un résultat

Pour un mesurande noté M, le résultat d'un mesurage devra être noté :

$$M = \hat{m} \pm U_{p\%}(M)$$

$\hat{m}$: le meilleur estimateur de la grandeur mesurée

$U_{p\%}(M)$: le meilleur estimateur de l'erreur de mesure appelée **incertitude de mesure élargie** (la notation U vient de l'anglais « uncertainty ») associé à un niveau de confiance $p\%$.

Signification :

Cette notation signifie que la valeur vraie a $p\%$ de chance se trouver dans l'intervalle :

$$[\hat{m} - U_{p\%}(M)\ ;\ \hat{m} + U_{p\%}(M)]$$

Cette intervalle est appelé **intervalle de confiance**.

Pour un niveau de confiance à 95%, dans le cas d'une répartition gaussienne on a :

$$M = \hat{m} \pm 2u(M)$$

Avec $u(M)$ l'incertitude-type liée à la mesure.

Remarque : nombre de chiffres significatifs

L'incertitude ne doit pas être donnée avec un nombre excessif de chiffres, à savoir : 1 ou 2 chiffres significatifs. En effet l'incertitude sur l'incertitude est assez importante : de l'ordre de 10-25 %.

En général on ne garde qu'un seul chiffre significatif en arrondissant à la valeur supérieure (on préfère majorer l'incertitude que la minorer). Mais si en ne gardant qu'un seul chiffre l'arrondi entraîne une trop grande surestimation (plus de 10% de la valeur de l'incertitude) on garde deux chiffres.

Une fois l'arrondi sur l'incertitude effectué il faut supprimer les chiffres qui n'ont pas de sens sur l'estimateur : on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position que celui de l'incertitude. On arrondira l'estimateur avec les règles usuelles (cf. document de cours sur les mesures)

Méthodes pour évaluer une incertitude :

Suivant la méthode utilisée pour effectuer le calcul d'une incertitude de mesure, on peut classer cette incertitude dans l'un des deux types ci-dessous :

- une **incertitude de type A** est évaluée par des méthodes statistiques de répétabilité qui mettent en jeu la **moyenne** et l'**écart-type**. Elle est issue de l'exploitation d'un nombre important de valeurs mesurées de manière identique.
- une **incertitude de type B** est évaluée par d'autres méthodes. Elle correspond en général à une mesure unique. Sa détermination n'est pas simple, car il faut prendre en compte toutes les sources d'erreurs ou, au préalable, avoir identifié les sources d'erreurs les plus importantes.

I. Evaluation de l'incertitude expérimentale liée à l'instrument utilisé sur une mesure (évaluation de type B)

En général, faute de temps, on ne peut pas réaliser l'étude d'une série d'expériences répétées, il faut procéder à d'autres méthodes d'estimation de l'incertitude. Nous allons voir comment déterminer l'incertitude-type $u(X)$ sur une mesure d'une grandeur X connaissant le matériel utilisé. Pour déterminer l'incertitude élargie, on supposera que l'incertitude-type calculée correspond à une répartition gaussienne et on prendra comme facteur d'élargissement 2 : $U_{95\,\%}(X) = 2 \times u(X)$

1. Erreur liée à un appareil de mesure pour lequel on dispose d'une information constructeur sur sa précision

a. Mesure d'un volume par de la verrerie jaugée en chimie

Sur ce matériel, la **classe** ou **tolérance** $\boldsymbol{a}$ est toujours indiquée (notée sur les instruments de mesure sous la forme $\pm a$).

La valeur réelle du volume mesurée peut se situer avec une égale probabilité dans un intervalle $[V - a\,; V + a]$. La loi de probabilité associée à ces instruments est une loi rectangulaire de largeur $2a$ (figure 1).

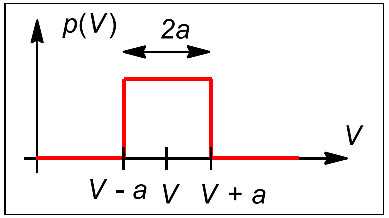


Figure 1 : loi de distribution rectangulaire associée à une tolérance $\boldsymbol{a}$

Le meilleur estimateur de l'incertitude-type $u(V)$ sur le volume mesuré est l'écart-type correspondant à la loi de probabilité rectangulaire :

$$u(V) = \frac{2a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Exemple : sur une pipette jaugée de 25 mL, on lit l'indication : $\pm 0{,}03$ mL

Incertitude-type :

$$u(V) = \frac{0{,}03}{\sqrt{3}} = 0{,}017 \text{ mL}$$

Incertitude-type relative :

$$\frac{u(V)}{V} = \frac{0{,}017}{25} = 0{,}07\ \%$$

Incertitude élargie à 95 % :

$$U_{95\,\%}(V) = 2 \times u(V) = 0{,}034 \text{ mL}$$

Volume mesuré avec un niveau de confiance à 95 % : $V = 25{,}00 \pm 0{,}04$ mL

b. Mesure d'une tension ou d'une intensité par un multimètre numérique

L'incertitude sur la mesure est exprimée sur la notice fournie par le constructeur sous la forme :

$$\Delta X = p\%X + n \text{ digit}$$

1 digit ou unité de représentation (UR) = 1 unité sur le dernier chiffre affiché par l'appareil

Une fois calculé ΔX est équivalent à la tolérance pour le volume précédemment présenté. La valeur réelle de la grandeur X mesurée peut se situer avec une égale probabilité dans un intervalle $[X - \Delta X\,; V + \Delta X]$. La loi de probabilité associée à ces instruments est encore une loi rectangulaire de largeur $2\Delta X$ et le meilleur estimateur de l'incertitude-type $u(X)$ sur le volume mesuré est l'écart-type correspondant à la loi de probabilité rectangulaire :

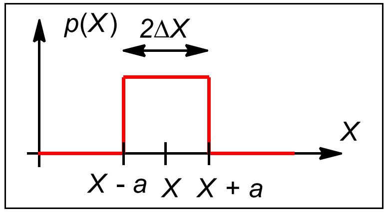


Figure 2 : loi de distribution rectangulaire

$$u(X) = \frac{2\Delta X}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta X}{\sqrt{3}}$$

Exemple : un voltmètre affiche l'indication $U = 11{,}64$ V, la notice indique pour ce calibre : $\Delta U = 2\%U + 3$ digit

Erreur :

$$\Delta U = 0{,}02 \times 11{,}64 + 3 \times 0{,}01 = 0{,}26 \text{ V}$$

Incertitude-type :

$$u(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = 0{,}15 \text{ V}$$

Incertitude-type relative :

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{0{,}15}{11{,}64} = 1{,}3\ \%$$

Incertitude élargie à 95 % :

$$U_{95\,\%}(U) = 2 \times u(U) = 0{,}30 \text{ mL}$$

Tension mesurée avec un niveau de confiance à 95 % :

$$V = 11{,}6 \pm 0{,}3 \text{ V}$$

2. Erreur liée à un appareil à affichage numérique ou avec graduation en l'absence de notice ou d'indication du constructeur (balance, règle, burette graduée, etc.)

La graduation d'un instrument de mesure analogique ou l'afficheur d'un appareil numérique ou l'afficheur d'un appareil numérique sont des sources d'incertitudes.

La résolution δ de l'appareil de mesure est la plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication délivrée par l'instrument.

Pour un appareil gradué : $\delta = 1$ graduation (écart entre 2 graduations)
Pour un appareil à affichage numérique : $\delta = 1$ digit (1 unité sur le dernier chiffre affiché)

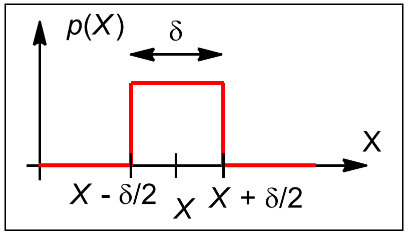
Si la résolution du dispositif de lecture est δ la valeur réelle de X peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle $[X - \delta/2\ ; X + \delta/2]$, ($X$ étant la valeur indiquée par l'appareil).

Cette erreur est en effet liée à l'arrondi que l'on effectue sur l'appareil graduée ou qu'effectue l'affichage. Si on lit par exemple une masse de 10,1 g sur une balance, cela signifie que la valeur réelle est comprise entre 9,95 g et 10,15 g car toutes les valeurs de cet intervalle donnent après arrondi 10,1 g.

La loi de probabilité associée à ces instruments est une loi rectangulaire de largeur δ (figure 3).

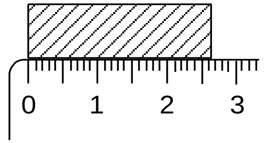
Le meilleur estimateur de l'incertitude-type $u(X)$ sur la grandeur mesurée est l'écart-type correspondant à la loi de probabilité rectangulaire :

$$\boxed{u(X) = \frac{\delta}{\sqrt{12}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}}$$



<u>Figure 3</u> : Loi de distribution rectangulaire associée à une résolution δ

Exemple : mesure de la longueur d'un objet à l'aide d'une règle graduée en mm



Résolution : $\delta = 1$ mm

Incertitude-type :

$$u(L) = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}29 \text{ mm}$$

Incertitude-type relative :

$$\frac{u(L)}{L} = \frac{0{,}29}{26} = 1{,}1\ \%$$

Incertitude élargie à 95 % :

$$U_{95\,\%}(L) = 2 \times u(L) = 0{,}58 \text{ mm}$$

Longueur mesurée avec un intervalle de confiance à 95 % : $L = 26{,}00 \pm 0{,}06$ mm

Exemple : mesure d'une masse d'un objet à l'aide d'une balance

Résolution : $\delta = 0{,}001$ g

Incertitude-type :

$$u(m) = \frac{0{,}001}{\sqrt{12}} = 0{,}0003 \text{ g}$$

Incertitude-type relative :

$$\frac{u(m)}{m} = \frac{0{,}0003}{5{,}141} = 0{,}006\ \%$$

Incertitude élargie à 95 % :

$$U_{95\,\%}(m) = 2 \times u(m) = 0{,}0006 \text{ g}$$

Masse mesurée avec un niveau de confiance à 95 % : $m = 5{,}1410 \pm 0{,}0006$ g

On s'aperçoit dans le cadre de ces deux exemples qu'un calcul d'incertitude « à la louche » permet rapidement de déterminer l'ordre de grandeur de l'incertitude : l'incertitude est de l'ordre de grandeur de la résolution. Il ne sera pas toujours nécessaire de pousser les calculs aussi loin car souvent seul l'ordre de grandeur est suffisant.

Dans les deux cas précédents l'évaluation « à la louche » donnerait :

$$L = 26{,}0 \pm 0{,}1 \text{ cm} \quad \text{et} \quad m = 5{,}141 \pm 0{,}001 \text{ g}$$

II. Evaluation de l'incertitude expérimentale liée à la méthode de mesure : « ressenti » de l'expérimentateur sur une mesure (évaluation de type B)

Le contexte de la mesure est également source d'erreur, et ce, indépendamment de la précision des appareils utilisés. Voyons cela sur deux exemples :

Exemple : détermination d'un volume à l'équivalence d'un titrage colorimétrique

Quelle que soit la précision de la burette utilisée, l'étendue de la zone de virage d'un indicateur coloré lors d'un titrage colorimétrique introduit une erreur supplémentaire. Il n'est pas toujours évident de déterminer « à la goutte près » le volume équivalent.

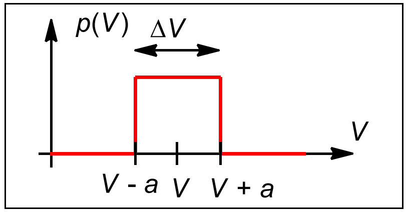


Figure 3 : Loi de distribution rectangulaire associée à une résolution δ

Si par exemple, le changement de couleur s'étale sur un volume $\Delta V = 0{,}5$ mL, la loi de probabilité associée sera une loi rectangulaire de largeur ΔV.

l'incertitude-type associée à cette erreur due à la méthode peut être estimée par :

$$\boxed{u_{\text{méthode}}(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta V}{2\sqrt{3}}}$$

Ici : $u_{\text{méthode}}(\mathrm{V}) = 0{,}14$ mL

Nous verrons dans la fiche suivante comment déterminer l'incertitude-type sur le volume équivalent sachant que l'on peut identifier et évaluer (au moins) trois sources d'erreurs :

- Erreur due à la méthode
- Erreur due à la tolérance du constructeur sur le volume de la burette
- Erreur due à la résolution de lecture.

Mais souvent une erreur est prépondérante devant les autres et cela simplifie les calculs.

Exemple : détermination de la distance focale d'une lentille par autocollimation

On déplace l'ensemble (lentille + miroir) jusqu'à ce que l'image se forme (nette !) dans le plan de l'objet. On a lors une distance lentille – objet égale à la distance focale f' de la lentille. Quelles que soient la qualité, la finesse des graduations du banc d'optique, il a une erreur due à la difficulté d'apprécier la position de la lentille pour laquelle l'image est nette (latitude de mise au point).

On constate par exemple que l'image est nette de $f'_{\text{min}} = 195$ mm à $f'_{\text{max}} = 203$ mm (« ressenti » de l'expérimentateur). D'où une cause d'erreur correspondant à l'incertitude-type $u_{\text{méthode}}$, en utilisant les caractéristiques d'une loi de probabilité rectangulaire de largeur $\Delta f' = f'_{\text{max}} - f'_{\text{min}}$:

$$u_{\text{méthode}} = \frac{\Delta f'}{\sqrt{12}} = \frac{(f'_{\text{max}} - f'_{\text{min}})}{\sqrt{12}} = \frac{203 - 195}{\sqrt{12}} = 2{,}3 \text{ mm}$$

Cette incertitude-type s'ajoute à celle due à la précision du banc d'optique, graduée en mm :

$$u_{\text{banc}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}3 \text{ mm}$$

De la même façon, nous verrons dans la fiche suivante comment déterminer l'incertitude-type sur la distance focale image tenant compte des deux sources d'erreurs.

Mais encore une fois si une des deux sources d'erreurs est prépondérante, les calculs pourront se simplifier.