Séance 4 : racines et puissances

I Racines carrées

1 Définition :

Soit a un réel positif, on appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, le réel positif dont le carré est a .

C'est-à-dire $x = \sqrt{a}$ signifie : $x \geq 0$ et $x^2 = a$.

Exemple :$\sqrt{9} = 3$ car $3 \geq 0$ et $3^2 = 9$.

2.Equation $x^2 = a$:

Soit a un réel strictement positif l'équation $x^2 = a$ a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.($\sqrt{a}$ est la solution positive et$-\sqrt{a}$ la solution négative).

Exemple :$x^2 = 2$ a pour solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Ne pas confondre : « $\sqrt{a}$ existe si a est un réel positif » et « si a est un réel positif le nombre $\sqrt{a}$ est lui aussi positif ».

3. Propriétés algébriques :Soient a et b deux réels

Si $a \geqslant 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; Si $a \geq 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$; si $a \leq 0$ alors $\sqrt{a^2} = \text{opp}(a) = -a$

Exemple :$\sqrt{(-3)^2} = 3 = \text{opp}(-3)$

Attention, il n'existe pas de règle de transformation de$\sqrt{a+b}$et de$\sqrt{a-b}$, $\sqrt{16+9} = 5$et$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$

Exercice 1: Démontrer sans calculatrice que les nombres suivants sont des entiers.

$\sqrt{7}^2$; $(-2\sqrt{3})^2$; $-2\sqrt{3^2}$; $\sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{3}$; $\sqrt{10^4}$; $\sqrt{25 \times 10^8}$; $\sqrt{5^2 - 4^2}$; $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

Exercice 2: Ecrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a et b sont des nombres rationnels et b est un nombre entier naturel sans calculatrice : $A = \sqrt{28} - 3\sqrt{63} + 6\sqrt{7}$; $B = \sqrt{27} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 2\sqrt{75}$; $C = \sqrt{\frac{8}{15} \times \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{24}}}$; $D = \left(\sqrt{2} + 4\sqrt{5}\right)^2$; $E = (2\sqrt{3} - 1)^2$

Exercice 3 : Rendre rationnel le dénominateur de chacune des expressions suivantes sans calculatrice :

$\frac{5}{\sqrt{2}}$; $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}-1}$; $\frac{5+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} + \frac{4-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

II Puissances d'un réel :

1. L'exposant est un entier naturel non nul :

Soit x un réel et n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, $x^n = x \times x \ldots \times x$(produit de n facteurs égaux à x)

Et $x^1 = x$

Exemple :$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; $2^1 = 2$ Connaître les carrés des 15 premiers entiers par coeur

2. L'exposant est un entier relatif :

Soit x un réel non nul et soit n un entier naturel non nul, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, par convention$x^0 = 1$.

Exemple :$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}et(-3)^0 = 1$

3. Propriétés :

Soient x et y des réels non nuls n et p des entiers relatifs,

$(x^n)^p = x^{np}$, $x^n \times x^p = x^{n+p}$, $\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$, $(xy)^n = x^n \times y^n$, $(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}$

4. Signe et puissances d'un réel :

Soit x un réel non nul et soit n un entier relatif :

si $x > 0$ alors $x^n > 0$

.si $x < 0$, $x^n > 0$ si n est pair et $x^n < 0$ si n est impair

Exercice 4 : Déterminer le signe de A, A', A'' et B, les calculer et mettre le résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible sans calculatrice :

$$\mathrm{A} = \frac{(-15)^3 \times 49^2}{-3^2 \times (-35)^4} ; A' = \frac{28^{-2} \times (-49)^2}{(-20)^{-2}} ; A'' = [(\frac{-2}{3})^2]^3 \times (\frac{3}{5})^{-2} \times (\frac{-4}{9})^{-3} ; B = \left(\frac{1}{2.10^{-2}}\right)^2$$

Exercice 5 : Soient a, b et c trois réels non nuls. Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a^n b^p c^q$ où n, p et q sont des entiers relatifs.

$$(a^4 b^{-2})^{-3} ; \frac{a^5 b^3 c^2}{a b^{-2} c^4} ; \frac{(a^2 b)^5 a c^{-2}}{(-a)^7 (b^2 c)^2} ; \frac{a^5 (b^3 c)^2}{(ab^2)^3 c} \div \frac{a(b^{-1} c^{-2})^2}{(a^2 b)^{-1} c^{-3}}$$

Les grosses bêtises à ne pas faire à l'issue de la séance 4 sur quelques exemples :

- Oublier que $x^2 = b$ possède deux solutions (notamment oublier celle qui est négative).
- Oublier que $\sqrt{a}$ n'existe que si a est positif.
- Dire que $\sqrt{-d}$ n'existe jamais : c'est faux car si d est négatif, -d est positif et donc la racine existe.
- Ne pas connaître les carrés des 15 premiers entiers et ne pas reconnaître leurs multiples (comme 18, 75, 147 etc.)
- Ne pas savoir « enlever » la racine au dénominateur pour un dénominateur du type $a + b\sqrt{c}$
- Faire l'énorme erreur en écrivant que $\sqrt{a+b} \cancel{= \sqrt{a} + \sqrt{b}}$. C'est une erreur très grave.
- Ne pas se rendre compte que les propriétés des puissances ne sont pas nouvelles : ce sont les mêmes que celles des puissances de 10

A l'issue de la séance 4 :

- Je connais tous les points des séances précédentes
- Je connais les définitions et propriétés relativement aux racines et aux puissances
- Je sais résoudre $x^2 = a$.
- Je connais les carrés des 15 premiers entiers et je sais reconnaître leurs multiples, notamment sous une racine.
- Je sais transformer $a + b\sqrt{c}$ au dénominateur d'une fraction en un entier : il suffit de multiplier au numérateur et au dénominateur par le conjugué $a - b\sqrt{c}$ car on retrouve alors une identité remarquable du type $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ où les racines disparaissent.
- Je connais le signe d'un nombre à une certaine puissance suivant le signe de ce nombre et suivant la parité de la puissance, je le visualise dans ma tête surtout, sans l'apprendre par cœur (cela doit être « logique »).
-