Séance 7 : proportionnalité

I Proportionnalité

1) Savoir calculer rapidement avec des fractions (rappels)

Pour b non nul,

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a\times c}{b}$$

Pour b et c non nuls :

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}\div c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{b\times c}$$

Pour b, c, d non nuls :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\times d=b\times c \text{ (produit en croix) ; } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ (échange des "moyens")}$$

Pour tous a, b, c, d non nuls :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a} \text{ (échange des "extrêmes")}$$

2) Tableau de proportionnalité et suites proportionnelles

Définition . Un tableau est un tableau de proportionnalité et présente deux suites de nombres proportionnelles si on passe d'une ligne à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre.

Exemple :

6	8	14
9	12	21

$\downarrow \times 1,5$ $\quad \uparrow \div 1,5$

3) Produit en croix et règle de trois en mathématiques

On suppose que les nombres a, b, c, d sont non nuls.

Si le tableau

a	c
b	d

est un tableau de proportionnalité alors on a (par cœur) :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \qquad a=\frac{b\times c}{d}. \qquad \boxed{a\times d=b\times c}$$

(règle de trois, par coeur) (produit en croix, par coeur)

Point méthode (par cœur) Comment trouver une inconnue avec un tableau de proportionnalité ?

Exemple :

12	x
8	20

on détermine x par $\frac{x}{20}=\frac{12}{8}$ $\quad x=\frac{20\times 12}{8}=\frac{4\times 5\times 2\times 6}{8}=5\times 6=30.$

4) Application concrète et unités

Dans un tableau de proportionnalité, très souvent les grandeurs inscrites ont une unité qu'il ne faut pas oublier. Soit chaque colonne a son unité, soit chaque ligne a son unité, tout dépend de la façon dont a été posé le tableau (au choix).

Exemple : 6 oeufs coûtent 1, 80 €. Combien coûtent 10 oeufs ?

On reconnaît une situation de proportionnalité. En effet le prix des œufs est proportionnel à leur nombre. On fait un tableau en précisant les unités.

Nombre d'œufs (en œufs)	6	10
Prix des œufs (en €)	1,8	x

La ligne de x correspond à des € donc le calcul donnera des €. Ici $\frac{x}{10}=\frac{1.8}{6}$ d'où $x=\frac{1,8\times 10}{6}=3$ €.

Attention aux unités !! Tout doit être exprimé ici en euros ou en œufs

Exercice 1

Cinq familles occupent à tour de rôle un appartement de vacances, pendant : 20 jours pour la première, 12 jours pour la deuxième, 25 jours pour la troisième, 30 jours pour la quatrième et 18 jours pour la cinquième. Elles partagent les frais proportionnellement à la durée de leur séjour. Le coût total de la location s'élève à 14400 euros.

Calculer la dépense de chaque famille. On fera un tableau de proportionnalité complet pour s'aider.

Exercice 2

On veut réaliser une maquette du système solaire. Dans cette maquette à l'échelle, le Soleil (diamètre : 1,4 million de km) est représenté par un ballon de diamètre 35 cm. Utiliser des tableaux de proportionnalité pour répondre aux questions. Attention aux unités : une unité à choisir pour la réalité et une unité commune à choisir pour la maquette.

Planète	Terre	Saturne	Uranus
Diamètre (en km)	12756	120536	51118
Distance au Soleil (en millions de km)	150	1430	2871

1) Citer un objet qui pourrait représenter chacune de ces trois planètes dans cette maquette en justifiant.

2) Dans la maquette, à quelle distance du ballon doit-on placer l'objet représentant la Terre ?

3) Même question pour Saturne et pour Uranus.

5) Coefficient de proportionnalité

a) Définition

Considérons le tableau suivant :

Volume d'un échantillon de jus d'orange (mL)	50,0	150	200	500	$1,20.10^3$	$1,80.10^3$
Masse de sucre contenu dans l'échantillon (g)	5,40	16,2	21,6	54,0	129,6	194,4

On peut vérifier que c'est un tableau de proportionnalité : on passe de la première ligne à la seconde en multipliant toujours par le même nombre.

Si on appelle G_1 la grandeur d'une ligne et G_2 la grandeur d'une deuxième ligne, le coefficient permettant de passer de G_1 à G_2 est le coefficient de proportionnalité k qui permet, connaissant G_1, d'en déduire G_2 (attention au sens !) :

$G_2 = k \times G_1$ donc notamment $k = G_2/G_1$ (par cœur)

Ici k = 5,40/50,0 = 16,2/150 = 21,6/200 = … = 0,108

Donc on peut écrire $G_2 = 0,108 \times G_1$ **en précisant bien que G_1 est en mL et G_2 en g**

Exercice 3 : ***utiliser le coefficient de proportionnalité pour tout l'exercice et non plus des produits en croix***

1) Sur l'exemple précédent, déterminer la masse de sucre dans un volume de $2,00.\ 10^3$ mL de jus en utilisant k.

2) Même question dans 43,0 L de jus en utilisant k.

3) Inversement, un échantillon du même jus de fruit possède une masse de 60,0 g de sucre. Quel est son volume ?

4) Dans l'exercice 12, déterminer le coefficient de proportionnalité permettant de calculer le prix du séjour connaissant sa durée.

Exercice 4

Voici les informations portées sur la fiche de péage d'autoroute d'un automobiliste :

Entrée à AAA : 12h38min Sortie à BBB : 14h15min Distance AAA-BBB : 226km

Cet automobiliste a-t-il respecté la limitation de vitesse sur autoroute ?

A savoir faire à l'issue de la séance 7 (1ère partie) :

- Reconnaître des situations de proportionnalité et construire un tableau de proportionnalité qui s'y rapporte.
- Connaître les règles sur les suites proportionnelles
- Savoir reconnaître si deux suites sont proportionnelles
- Savoir trouver le coefficient de proportionnalité pour passer de G_1 à G_2 sans se tromper de sens.
- Déterminer la valeur une case d'un tableau de proportionnalité ayant 4 cases, les trois autres étant connues
- Faire attention aux unités dans les calculs et dans le résultat final

Les grosse bêtises à ne pas commettre à l'issue de la séance 7 (1ère partie)

- Se tromper lors du calcul de la 4ème case d'un tableau de proportionnalité à 4 cases
- Ne pas tenir compte des unités
- Calculer un coefficient de proportionnalité à l'envers

b) Unité du coefficient de proportionnalité

En sciences expérimentales, le coefficient de proportionnalité k permettant de passer de G_1 à G_2, quand il existe ($G_2 = k \times G_1$), a, en général une unité. Comme $G_2 = k \times G_1$, k peut s'écrire :

$$k = \frac{G_2}{G_1}$$

Donc l'unité de k est l'unité de G_2 par l'unité de G_1.

Ainsi, si G_2 est une distance et G_1 est une durée, l'unité de k sera une unité de distance par unité de durée, par exemple des mètre par seconde que l'on note m/s ou, bien mieux, $m.s^{-1}$ **qui est la notation qu'il faudra adopter maintenant**. k est appelée dans ce cas-là une vitesse.

Attention à bien s'exprimer et à dire « mètre ***par*** seconde » et non pas « ~~mètre seconde~~ », ou bien kilomètre ***par*** heure et ~~non kilomètre heure~~. Le langage courant est en effet source de très grosses confusions. Ne pas hésiter à reprendre (gentiment) son entourage pour une meilleure compréhension de ces grandeurs.

Par exemple, dire qu'un escargot a une vitesse de 23 $cm.min^{-1}$ signifie que l'escargot *avance* d'une *distance* de 23 cm *pendant* une *durée* de 1 minute (ou pendant une variation de temps de 1 minute). Les termes employés (noms communs, verbe, adverbe…) sont importants (« distance », « pendant », « durée », « avance »), il faut les trouver pour chaque situation.

Exercice 16 : reprendre le cas du paragraphe 5)a) et donner la valeur de k avec la bonne unité. Indiquer en une phrase ce que cela signifie en employant un vocabulaire scientifique approprié (et non ~~« pour 1L de … on a … »~~).

c) De nouvelles conversions

Une vitesse est une durée par unité de temps. Elle peut donc s'exprimer en $m.s^{-1}$ ou en $km.min^{-1}$ par exemple. Il faut savoir correctement passer d'une unité à une autre.

Exemples : une puissance est une énergie (par exemples des joules J) par unité de temps (par exemple la seconde s).

Convertir une grandeur d'une première unité vers une seconde unité	**Exemple traité : convertir A = $42{,}70.10^{-5}$ $J.s^{-1}$ en $MJ.h^{-1}$**	**Exemple à traiter : convertir B = 254,3 $km.h^{-1}$ en $m.s^{-1}$**
Mettre le nombre sous forme scientifique en respectant le nombre de chiffres significatifs	$A = 4{,}270 \times 10^{-4} J.s^{-1}$	
Mettre l'unité de la grandeur sous la forme d'un quotient de deux unités pour faire disparaitre les puissances négatives	$= 4{,}270 \times 10^{-4} \times \frac{\mathbf{1J}}{\mathbf{1s}}$	
Convertir chaque unité du quotient, séparément, dans les nouvelles unités désirées, comme vu dans le chapitre sur les conversions, en gardant le quotient • en faisant surtout attention à ne pas se tromper de sens (réfléchir 10 s) • en n'hésitant pas à écrire toutes les étapes pour les deux conversions	$= 4{,}270 \times 10^{-4} \times \frac{\mathbf{1 \times 10^{-6} MJ}}{\mathbf{\frac{1}{3600} h}}$ Je me représente mentalement 1J puis1.10^{-6} MJ et je vérifie que c'est bien la même chose Je me représente mentalement 1s puis $\mathbf{\frac{1}{3600} h}$ et je vérifie que c'est bien la même chose	
Ordonner le nouveau nombre en réunissant les puissances de 10 et en faisant la bonne opération sur le quotient	$= 4{,}270 \times 10^{-4} \times \mathbf{10^{-6}} \times \mathbf{3600\ MJ.h^{-1}}$	
Faire le calcul éventuellement à la calculatrice (si autorisée) puis remettre sous forme scientifique	$= 15372 \times \mathbf{1 \times 10^{-10}\ MJ.h^{-1}}$ $= 1{,}5372 \times \mathbf{10^{4}} \times 10^{-10}\ MJ.h^{-1}$ $= 1{,}5372 \times \mathbf{10^{-6}}\ MJ.h^{-1}$	
Garder le bon nb de CS par rapport au départ Je vérifie, par rapport au nombre de départ : • L'ordre de grandeur	$= 1{,}537(2) \times \mathbf{10^{-6}}\ MJ.h^{-1}$ L'odg est le même	

Exercice 5 : convertir en mettant sous forme scientifique et en respectant les CS, avec les étapes de la méthode ci-dessus.

1) $33{,}8.10^3$ $m.s^{-1}$ en $km.h^{-1}$
2) $23{,}6.g.L^{-1}$ en $kg.m^{-3}$ (rappel : $1\ m^3 = (1m)^3$ et $1L = 1\ dm^3 = (1\ dm)^3$
3) $3{,}35.10^{-4}$ $J.m^{-2}$ en $kJ.km^{-2}$ 4) $2{,}76.10^{-4}$ $mol.L^{-1}$ (mole par litre, unité de concentration molaire) en $\mu mol.cm^{-3}$
5) 0,0062 $hab.m^{-2}$ (habitant par mètre carré) en $Mhab.km^{-2}$ 6) 34 $k€.mois^{-1}$ en $€.siècle^{-1}$
7) $89{,}5.10^{-3}$ $°C.s^{-1}$ (degré Celsius par seconde) en $m°C.h^{-1}$ (millidegré Celsius par heure)

Exercice 6

Des trois vitesses, laquelle est la plus grande : $3500 km.h^{-1}$ $58000 m.min^{-1}$ $950 m.s^{-1}$?

4) Proportionnel ou pas ?

a) Introduction

En sciences, de nombreuses grandeurs sont proportionnelles entre elles. Mais d'autres ne le sont pas du tout. Il ne faut pas voir de la proportionnalité partout !

Exercice 7

Parmi les exemples suivants, indiquer s'il y a proportionnalité entre les deux grandeurs G_1 et G_2 et indiquer une unité possible pour le coefficient de proportionnalité, quand celui-ci existe, pour passer de la grandeur G_1 à la grandeur G_2.

Méthode : pour « sentir » si deux grandeurs sont proportionnelles, on triple l'une par exemple et on réfléchit pour savoir si physiquement l'autre triple aussi en même temps. Si c'est le cas, les deux grandeurs sont proportionnelles.

situation	Grandeur G_1	Grandeur G_2
1	Durée pendant laquelle coule l'eau d'un robinet ouvert, sans changer l'ouverture	Volume d'eau écoulé
2	Nombre d'habitants en France	temps
3	Force gravitationnelle exercée par un objet A sur un objet B	Distance entre les deux corps
4	Volume d'un l'échantillon de cuivre pur	Masse de l'échantillon
5	Nombre de molécules dans un échantillon de glucose pur	Masse de l'échantillon
6	Nombre de jours pour construire une maison	Nombre d'ouvriers pour construire cette maison
7	Nombre de cellules d'un végétal	Durée de vie de ce végétal
8	Salaire d'un employé	Nombre d'heures supplémentaires toutes rémunérées de la même façon.
9	Durée d'allumage	Energie dépensée par une ampoule allumée toujours de la même façon
10	Nombre de comprimés d'aspirine ingérés	Quantité de matière d'aspirine ingérée
11	Surface du panneau solaire	Energie reçue par un panneau solaire

b) Le cas de deux quantités inversement proportionnelles

En reprenant la situation 6 du tableau précédent, on s'aperçoit que s'il est nécessaire de tripler le nombre de jours pour construire une maison, cela correspond (en considérant que seul le nombre d'ouvriers peut changer) à un nombre d'ouvrier qui a été divisé par 3 (et non pas multiplié par trois). Ou, ce qui revient au même, pour **diviser** par 3 le nombre de jours nécessaires pour construire une maison, cela signifie bien que le nombre d'ouvrier a été **multiplié** par 3.

On dit que les deux grandeurs sont inversement proportionnelles

Deux quantités sont inversement proportionnelles, si l'une est proportionnelle à l'inverse de l'autre et cela se caractérise par leur produit constant : $G_2 = k' \frac{1}{G_1}$ *ou encore* $G_1 \times G_2 = k' = cste$

Exemple : 15 ouvriers pendant 12 jours sont nécessaires pour faire des travaux de canalisations dans une ville. Or la municipalité ne peut disposer que 10 hommes. Combien de jours seront nécessaires pour faire les travaux ?

Commentaire de bon sens : *le nombre d'ouvriers* ***n'est pas proportionnel*** *au nombre de jours travaillés ; il ne faut pas faire de produit en croix.*

Le travail à faire ne dépend pas du nombre d'ouvriers et du nombre de jours ; il faut raisonner en quantité de travail exprimée en <u>ouvriers × jours (ou ouvriers.jours)</u> et cette quantité de travail reste fixe.

Elle s'exprime de deux façons différentes. D'après les hypothèses, elle vaut : 15 ouvriers × 12 jours, que l'on écrit, dans les entreprises de bâtiment, 15×12 ouvriers.jours (soit 180 ouvriers.jours).

Si x est le nombre de jours cherchés, cette quantité de travail vaut aussi $10 \times x$ ouvriers.jours .

Ainsi $15 \times 12 = 10 \times x$ et donc $x = \frac{15\times12}{10} = \frac{3\times5\times2\times6}{2\times5} = 18$. Il faut donc 18 jours pour faire les travaux

Exercice 8

Pierre bêcherait mon jardin en 10h et Michel en 12h. Je me joins à eux, et, travaillant ensemble, nous bêchons le jardin en 4h. Combien de temps aurais-je mis si j'avais travaillé seule ?