# <u>Mesure et incertitude, métrologie</u>

Fiche n°

## I Notion d'erreurs

### 1) Introduction

En sciences expérimentales, il n'existe pas de mesures exactes : celles-ci sont toujours entachées d'erreurs plus ou moins importantes selon le protocole, la qualité des instruments de mesure ou le rôle de l'opérateur. Évaluer l'incertitude sur une mesure est souvent un processus complexe, mais il s'agit d'une étape essentielle dans la détermination de la valeur mesurée

| |
|---|
| Mesurer une grandeur, c'est rechercher une valeur de cette grandeur et lui associer une incertitude afin d'évaluer la qualité de la mesure. |

**Définitions et notations :**

- la grandeur à mesurer est appelée le **mesurande.** Exemple : la masse volumique de l'éthanol
- on appelle **mesurage** (mesure) l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur (on notera $\boldsymbol{m}$ le résultat d'un mesurage)
- la **valeur vraie** ($\boldsymbol{M}_{\mathbf{vrai}}$) du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue !
- L'**erreur de mesure** ($\boldsymbol{E}$) est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie. Par définition cette erreur est inconnue puisque la valeur vraie est inconnue ! $E = m - M_{\text{vrai}}$

### 2) Quelles sont les erreurs rencontrées lorsqu'on fait une mesure ?

#### a) Les erreurs de mesure systématiques

Les erreurs systématiques ont une valeur définie identique à chaque fois que l'on mesure la même grandeur, dans les mêmes conditions. Elles ont une origine bien précise (mais cette origine n'est pas toujours évidente à identifier).

| |
|---|
| L'erreur systématique peut être considérée comme une erreur « constante » qui affecte chacune des mesures. |

- **Les erreurs instrumentales :** par exemple, une pipette peut délivrer un volume légèrement différent de ce qu'indique sa contenance si son utilisation est faite à une température très différente de la température d'étalonnage fait par l'industriel.
- **Les erreurs dues à la méthode :** ces erreurs sont plus difficiles à détecter et à corriger car elles dépendent du système étudié (qu'il soit chimique, physique, biologique etc.) et des hypothèses faites dans le choix de la méthode.
- **Les erreurs personnelles :** dues à un problème systématiquement le même de mesure de la part de l'expérimentateur (pour cause de problème de santé par exemple : daltonisme, astigmatisme etc.)

Cette erreur ne peut être réduite qu'en appliquant une correction. Par exemple, pour éviter une erreur systématique due à l'absorption de la cuve et du solvant lors d'une mesure de spectrophotométrie on effectue « un blanc ».

#### b) Les erreurs de mesure aléatoires

La valeur d'une grandeur expérimentale dépend toujours de nombreux facteurs que nous ne pouvons pas contrôler : ces facteurs sont appelés **grandeurs d'influences**. Ces grandeurs d'influence évoluent de manière aléatoire, ainsi si nous effectuons plusieurs fois la mesure du mesurande nous n'obtiendrons pas forcément la même valeur. Par exemple, une expérience consiste à faire croître une population de bactéries sur un support nutritif bien précis. On désire ensuite connaître la densité $D$ de ces bactéries exprimées en nombre de bactéries par millimètres carrés (pour une hauteur donnée de milieu nutritif). Pour cela, on fait croître la population sur un support nutritif de taille 5cm × 5cm constitué de minuscules compartiments de 1mm par 1mm. En utilisant un microscope on compte le nombre de bactéries par compartiment (donc par $mm^2$). La simple présence d'une poussière initialement dans un des compartiments peut engendrer une différence d'un compartiment à l'autre. Ou le mélange nutritif n'est pas tout à fait homogène d'un compartiment à l'autre. Ou la température, ou la pression, ou la hauteur de milieu etc. Toutes ces sources engendrent des erreurs de mesure aléatoires dans le sens où, en moyenne, elles vont s'annuler…

### 3) Justesse et fidélité

Si l'on répète l'opération de mesure un grand nombre de fois ($n$ fois) dans les mêmes conditions (conditions de répétabilité) :

Le meilleur estimateur de la valeur vraie est la valeur moyenne des $n$ mesures, noté : $\overline{m}$

L'erreur systématique est la différence entre le meilleur estimateur de la valeur vraie et la valeur vraie :

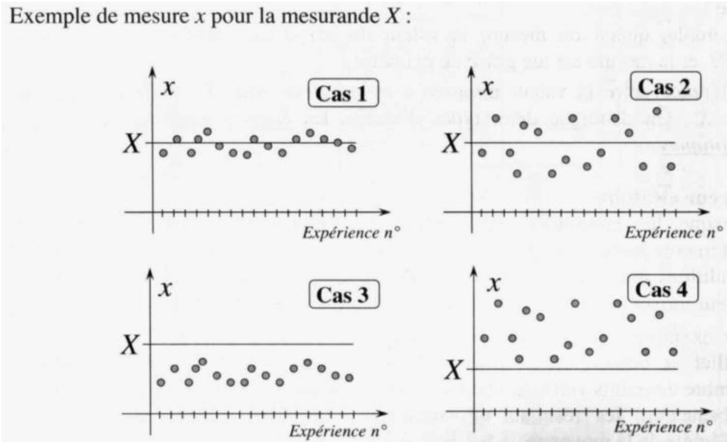
$$E_s = \overline{m} - M_{\text{vrai}}$$

Un instrument de mesure est d'autant plus **juste** que l'erreur systématique est faible.

L'erreur aléatoire pour chaque mesure notée $m_i$ est la différence entre cette mesure et la moyenne de toutes les mesures.

$$E_a = m_i - \overline{m}$$

Un instrument de mesure est dit d'autant plus **fidèle** que l'erreur aléatoire est faible lors de mesures répétées.




Pour les 4 cas ci-contre, qualifier l'instrument de mesure.

Cas 1 : juste et fidèle
Cas 2 : juste et peu fidèle
Cas 3 : peu juste et fidèle
Cas 4 : peu juste et peu fidèke

## II Notion d'incertitude et présentation du résultat

Les erreurs de mesure sont inévitables. Le résultat d'une mesure présente donc toujours une part d'incertitude. Il convient donc d'une part d'estimer la valeur vraie du mesurande et d'autre part d'estimer, à partir des mesures expérimentales, l'incertitude autour de cette valeur. Le résultat fait alors apparaître deux nombres : valeur qu'on estime la plus proche de la valeur vraie Mvrai. (c'est ce qu'on appelle le **meilleur estimateur de la grandeur mesurée, noté $\widehat{m}$) ;** il faut y ajouter une valeur qu'on estime la meilleure estimation de l'incertitude commise de part et d'autre de $\widehat{m}$ pour un niveau de confiance de p%.

Pour un mesurande noté $M$, le résultat d'un mesurage devra être noté :

$$M = \widehat{m} \pm U_{p\%}(M)$$

$\widehat{m}$ : le meilleur estimateur de la grandeur mesurée
$U_{p\%}(M)$ : le meilleur estimateur de l'incertitude de mesure appelée **incertitude de mesure élargie** (la notation $U$ vient de l'anglais « uncertainty ») associé à un niveau de confiance $p\%$.
**Signification :**
Cette notation signifie que la valeur vraie a $p\%$ de chance se trouver dans l'intervalle :

$$[\widehat{m} - U_{p\%}(M)\ ;\ \widehat{m} + U_{p\%}(M)]$$

Cette intervalle est appelé **intervalle de confiance**. On peut aussi utiliser la notation suivante pour le résultat d'un mesurage :

$$M \in [\widehat{m} - U_{p\%}(M)\ ;\ \widehat{m} + U_{p\%}(M)]$$

En général, la largeur de cet intervalle est choisie pour avoir 95% ou 99% de chance de trouver la valeur vraie à l'intérieur. Un niveau de confiance plus élevé correspondra pour un même mesurage à un intervalle plus grand (attention) autour du meilleur estimateur.

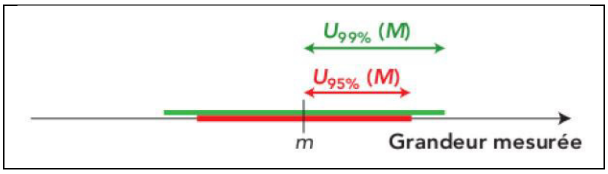



**Figure 1 : Importance du choix du niveau de confiance**

Attention ! Comment noter correctement le résultat d'une mesure ? (à savoir faire)

L'incertitude $U_{p\%}(M)$ ne doit pas être donnée avec un nombre excessif de chiffres, à savoir : 1 ou 2 chiffres significatifs. En effet l'incertitude sur l'incertitude est assez importante : de l'ordre de 10-25 %. En général on ne garde qu'un seul chiffre significatif en arrondissant à la valeur supérieure (on préfère majorer l'incertitude que la minorer). Mais si en ne gardant qu'un seul chiffre l'arrondi entraîne une trop grande surestimation (plus de 10% de la valeur de l'incertitude) on garde deux chiffres. Une fois l'arrondi sur l'estimateur de l'incertitude effectué il faut supprimer les chiffres qui n'ont pas de sens sur l'estimateur de la grandeur : on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position que celui de l'incertitude gardée. On arrondira l'estimateur avec les règles usuelles.

| | | |
|---|---|---|
| **Exemples :** | Mesure d'une résistance | $\hat{r} = 100{,}351389\ \Omega$ et $U_{95\%} = 0{,}842349\ \Omega$ |
| | Résultat à indiquer : | $r = 100{,}4 \pm 0{,}8\ \Omega$ avec un niveau de confiance de 95 % |
| | Mesure d'une concentration | $\hat{c} = 0{,}1412\ \mathrm{mol.L^{-1}}$ et $U_{95\%} = 1{,}64.10^{-2}\mathrm{mol.L^{-1}}$, |
| | Résultat à indiquer : | $c = 0{,}141 \pm 0{,}016$ mol.L$^{-1}$ avec un niveau de confiance de 95. |

Il ne reste plus , maintenant, qu'à correctement, à partir de mesures, :
- déterminer le meilleur estimateur de la grandeur mesurée
- déterminer le meilleur estimateur de l'erreur de mesure pour un intervalle de p% choisi (càd l'incertitude de mesure élargie)

Cette science s'appelle la **métrologie**. Les résultats à utiliser sont fournis dans les paragraphes suivants.

## III Incertitude expérimentale par étude statistique de répétabilité (évaluation de type A)

Reprenons l'exemple des bactéries et de la mesure de la densité D de ces bactéries sur le milieu nutritif. En utilisant un microscope on compte le nombre de bactéries par compartiment sur vingt compartiments pris au hasard. On trouve les valeurs suivantes : 56, 57, 58, 58, 59, 59, 60, 60, 60, 61, 61, 61, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 64, 65.

### 1) Rappels mathématiques

#### a) Moyenne d'une série de mesure

La valeur moyenne $\overline{x}$ d'une série de mesure de la grandeur X est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$n$ : le nombre de mesures effectuées de la grandeur $X$
$\hat{x}$ : le meilleur estimateur de $x$
$x_i$ : les différentes valeurs mesurées pour la grandeur $X$
$\overline{x}$ : la valeur moyenne des $n$ mesures $x_i$

#### b) Ecart type expérimental

L'écart-type expérimental des mesures $s_{\text{exp}}(X)$de la grandeur X est donné par

$$s_{\text{exp}}(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

$s_{\text{exp}}(X)$ : écart-type expérimental des mesures (écart-type de répétabilité) dans la même unité que $X$
$n$ : le nombre de mesure effectuée de la grandeur $X$
$x_i$ : les différentes valeurs mesurées pour la grandeur $X$
$\overline{x}$ : la valeur moyenne des $n$ mesures

L'écart-type expérimental traduit la dispersion des valeurs expérimentales de la série autour de la moyenne.

#### c) Exemple

Déterminer la moyenne et l'écart-type expérimental correspondant à la série de mesures de D des bactéries. Il faut savoir utiliser les fonctionnalités de sa calculatrice. C'est souvent ce qui est noté « $\sigma_{n-1}$ »qu'il faut notamment utiliser.

Réponses : $\overline{d}$ = 60,6 bactéries.mm$^2$
$s_{\text{exp}}(D)$ =2,326 bactéries.mm$^{-2}$

### 2) Meilleur estimateur $\hat{x}$ de la grandeur mesurée

Logiquement, le meilleur estimateur $\hat{x}$ est la valeur moyenne $\overline{x}$ des mesures effectuées :

$$\hat{x} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

### 3) Meilleur estimateur de l'incertitude de mesure

Il s'agit d'estimer l'incertitude sur la moyenne. Plus le nombre n de mesures effectuées est grand et plus la moyenne $\overline{x}$ se rapproche de la valeur vraie avec une incertitude faible. On introduit la grandeur qui va permettre d'obtenir une estimation de l'incertitude sur la valeur moyenne d'un échantillon.

Elle est appelée **incertitude-type** et notée $\boldsymbol{u(X)}$. Elle se calcule grâce à la formule suivante (qui peut se démontrer mathématiquement) :

$$u(X) = \frac{s_{\text{exp}}(X)}{\sqrt{n}}$$

$s_{\text{exp}}(X)$ : l'écart-type expérimental des mesures de l'échantillon de $n$ mesures
$n$ : nombre de mesures effectuées

L'incertitude type ne prend pas en compte le degré de confiance qu'on décide d'obtenir pour l'incertitude de mesure (par exemple 60 % ou 99,5 %). On introduit alors un coefficient qui prend en compte à la fois le degré de confiance désiré et le nombre de mesures effectuées. Ce sont les facteurs d'élargissement de Student qui sont tabulés notés $t_n^{p\,\%}$(voir annexe) :

Pour un niveau de confiance à 95%, on a l'estimateur U(X) de l'incertitude de mesure qui vaut :

$$U(X) = t_n^{95\,\%}u(X)$$

### 4) Conclusion

Il faut, au final, écrire le résultat sous la forme (avec un niveau de confiance choisi de 95 %):

$$X = \overline{x} \pm t_n^{95\,\%} u(X) = \overline{x} \pm t_n^{95\,\%} \frac{s_{\exp}(X)}{\sqrt{n}}$$

Exemple : on cherche une distance d avec une confiance de 80 % et on trouve $d = 5{,}68 \pm 0{,}06$. Cela signifie que l'on a 80% de chance que la véritable valeur de d se trouve entre 5,62 m et 5,74 m

Remarque : si $n$ est très grand, on fera "l'approximation gaussienne ":

$$X = \overline{x} \pm 2\frac{s_{\exp}(X)}{\sqrt{n}}$$

## IV Estimation du résultat du mesurage à partir que d'une seule mesure (évaluation de type B)

En général, faute de temps, on ne peut pas réaliser l'étude d'une série d'expériences répétées, il faut procéder à d'autres méthodes d'estimation de l'incertitude. Imaginons avoir mesuré un mesurande X avec la valeur unique expérimentale x. Pour simplifier, tous les résultats sont donnés avec un intervalle de confiance à 95%. Dans les problèmes, les formules seront toujours données avec directement les coefficients à utiliser.

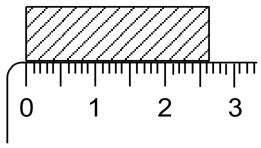
### 1) Meilleur estimateur $\widehat{x}$ de la grandeur mesurée

Il s'agit de l'unique grandeur mesurée :

$$\hat{x} = x$$

### 2) Meilleur estimateur de l'incertitude de mesure

a) Matériel gradué




On détermine dans un premier temps la résolution δ de l'appareil (plus petite graduation).

Le meilleur estimateur de l'incertitude type est alors (l'écart-type correspondant à la loi de probabilité rectangulaire de largeur δ pour ceux que cela intéresse égale à) :

$$u(X) = \frac{\delta}{\sqrt{12}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}$$

L'incertitude élargie vaut alors :

$$U_{95\,\%}(X) = 2 \times u(X) = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

Le résultat se met sous la forme

$$X = \mathrm{x} \pm U_{95\,\%}(X) = \mathrm{x} \pm \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

Déterminer l'incertitude relative de la mesure effectuée avec la règle et donner la valeur mesurée en cm avec incertitude.

Réponse :

Résolution : $\delta = 1$ mm

Incertitude-type :

$$u(L) = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}29 \text{ mm}$$

Incertitude-type relative :

$$\frac{u(L)}{L} = \frac{0{,}29}{26} = 1{,}1\ \%$$

Incertitude élargie à 95 % :

$$U_{95\,\%}(L) = 2 \times u(L) = 0{,}58 \text{ mm}$$

Longueur mesurée avec un intervalle de confiance à 95 % : $L = 26{,}00 \pm 0{,}06$ mm

b) Affichage sans notice de l'appareil


On a les mêmes résultats que le paragraphe précédent.

Déterminer l'incertitude relative de la mesure effectuée avec la balance électronique et donner la valeur mesurée en g avec incertitude.

Réponse :

Résolution : $\delta = 0{,}001$ g

Incertitude-type :
$$u(m) = \frac{0{,}001}{\sqrt{12}} = 0{,}0003 \text{ g}$$

Incertitude-type relative :
$$\frac{u(m)}{m} = \frac{0{,}0003}{5{,}141} = 0{,}006\ \%$$

Incertitude élargie à 95 % :
$$U_{95\,\%}(m) = 2 \times u(m) = 0{,}0006 \text{ g}$$

Masse mesurée avec un niveau de confiance à 95 % : $m = 5{,}1410 \pm 0{,}0006$ g

c) Verrerie jaugée


Sur ce matériel, la **classe** ou **tolérance** $\boldsymbol{a}$ est toujours indiquée (notée sur les instruments de mesure sous la forme $\pm a$).

Le meilleur estimateur de l'incertitude type est alors (l'écart-type correspondant à la loi de probabilité rectangulaire de largeur 2a pour ceux que cela intéresse égale à) :
$$u(X) = \frac{2a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$
L'incertitude élargie vaut alors :
$$U_{95\,\%}(X) = 2 \times u(X) = 2\frac{a}{\sqrt{3}}$$
Le résultat se met sous la forme
$$X = \text{x} \pm U_{95\,\%}(X) = \text{x} \pm 2\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Déterminer l'incertitude relative de la mesure effectuée avec la pipette jaugée ci-contre et donner la valeur mesurée en mL avec incertitude.

Réponse :

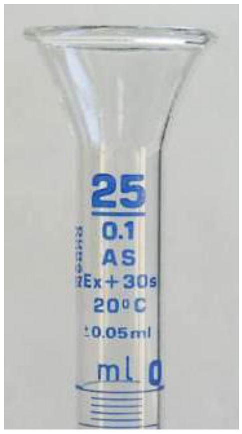
Incertitude-type :
$$u(V) = \frac{0{,}03}{\sqrt{3}} = 0{,}017 \text{ mL}$$

Incertitude-type relative :
$$\frac{u(V)}{V} = \frac{0{,}017}{25} = 0{,}07\ \%$$

Incertitude élargie à 95 % :
$$U_{95\,\%}(V) = 2 \times u(V) = 0{,}034 \text{ mL}$$

Volume mesuré avec un niveau de confiance à 95 % : $V = 25{,}00 \pm 0{,}04$ mL

e) Cas de la lecture d'un volume sur une burette




Pour faire une mesure du volume versé par exemple à l'équivalence lu sur la burette ci-contre, il faut faire deux lectures de volume successives : ajustage au zéro et volume versé à l'équivalence. L'incertitude type de chaque lecture est, en notant la résolution δ de l'appareil (plus petite graduation, ici 0,1 mL comme affiché en-dessous du 25).

$$u_{mesure}(V_{eq}) = \frac{\delta}{\sqrt{12}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}$$

D'autre part l'incertitude type liée à la tolérance indiquée par le constructeur est, en notant a cette tolérance (ici a = 0,05 mL affiché au-dessus de mL, en supposant qu'on est à 20°C)
$$u_{tolétance}(V_{eq}) = \frac{2a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

En tenant en compte les deux sources d'erreur (les deux lectures et la précision de la burette), l'incertitude type sur $V_{eq}$ est calculée au final par

$$u(V_{eq}) = \sqrt{2u_{mesure}{}^2(V_{eq}) + u_{tolétance}{}^2(V_{eq})}$$

d) Multimètre numérique

L'incertitude sur la mesure est exprimée sur la notice fournie par le constructeur sous la forme :

$$\Delta X = p\%X + n \text{ digit}$$

1 digit ou unité de représentation (UR) = 1 unité sur le dernier chiffre affiché par l'appareil

Le meilleur estimateur de l'incertitude type est alors (l'écart-type correspondant à la loi de probabilité rectangulaire de largeur 2a pour ceux que cela intéresse égale à) :

$$u(X) = \frac{2\Delta X}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta X}{\sqrt{3}}$$

L'incertitude élargie vaut alors :

$$U_{95\,\%}(X) = 2 \times u(X) = 2\frac{\Delta X}{\sqrt{3}}$$

Le résultat se met sous la forme

$$X = \mathrm{x} \pm U_{95\,\%}(X) = \mathrm{x} \pm 2\frac{\Delta X}{\sqrt{3}}$$

Déterminer l'incertitude relative de la mesure effectuée avec un voltmètre affichant une tension $U_1$ de 11,64 V, la notice indiquant pour ce calibre : $\Delta U = 2\%U + 3$ digit, et donner la valeur mesurée en V avec incertitude.

## V Estimation du résultat du mesurage à partir d'un calcul afin d'obtenir Y (évaluation de type C)

### 1) Meilleur estimateur $\widehat{Y}$ de la grandeur calculée

Le meilleur estimateur de la valeur vraie est la valeur obtenue $Y_{calculée}$ par calcul en utilisant les meilleurs estimateurs des grandeurs $X_i$ intervenant dans le calcul.

$$\hat{Y} = Y_{calc}$$

### 2) Meilleur estimateur de l'incertitude de mesure

Lorsqu'une grandeur est déterminée par un calcul faisant intervenir plusieurs grandeurs mesurées dont les erreurs sont indépendantes alors on peut déterminer l'incertitude-type sur cette grandeur par une formule de propagation des incertitudes.

Dans le cas général on pourra utiliser l'outil informatique pour effectuer le calcul (logiciel GUM_MC), mais très souvent la relation entre les différentes grandeurs est assez simple et la relation de propagation d'incertitudes se simplifie alors :

Le meilleur estimateur de l'incertitude type est alors fourni par les équations suivantes :

| Relation entre $Y$ et les $X_i$ | Formule de propagation |
|---|---|
| $Y = \alpha X$ où α est une constante | $u(Y) = \alpha u(X)$ |
| $Y = \alpha X_1 \pm \beta X_2$ | $u(Y) = \sqrt{\alpha^2 u^2(X_1) + \beta^2 u^2(X_2)}$<br>On obtiendra une formule similaire avec $n$ termes |
| Si $Y = X_1 X_2$ ou $Y = \frac{X_1}{X_2}$ | $\frac{u(Y)}{Y} = \sqrt{\left(\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{u(X_2)}{X_2}\right)^2}$<br>Incertitude relative = racine de la somme des carrés des incertitudes relatives<br>On obtient une formule similaire avec $n$ termes |

Ces formules ne seront pas toujours forcément fournies.

L'incertitude élargie vaut alors :

$$U_{95\,\%}(Y) = 2 \times u(Y)$$

Le résultat se met sous la forme

$$Y = Y_{calc} \pm U_{95\,\%}(Y)$$

Exemple : on veut déterminer la concentration inconnue d'un réactif titré au sein d'une solution, le calcul étant le suivant :

$$c_{inc} = \frac{c_{titrant} \times V_E}{5 \times V_{titré}}$$

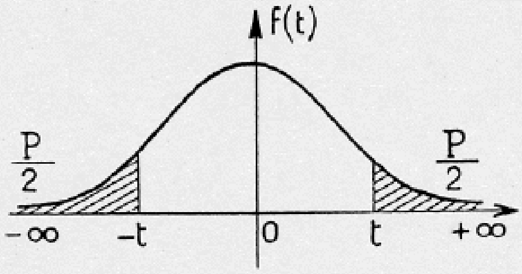
Avec $c_{titrant} = 2{,}00.10^{-2} \pm 0{,}03.10^{-2}$ mol.L$^{-1}$, $V_E$ = 14,4 mL lu sur la burette graduée tous les 0,1 mL avec une tolérance de 0,05 mL et $V_{titré}$ = 25,00 mL mesurés avec la pipette du paragraphe précédent.

Déterminer l'incertitude relative sur $c_{inc}$ et donner la valeur calculée avec incertitude. Voir aussi TP

Annexe 1 : loi de Student

Coefficient de Student correspondant à la probabilité p d'être dépassée pour un nombre de degré de liberté v = n-1 (n : nombre de mesure)

Ainsi, le coefficient de Student càd le facteur d'élargissement pour un niveau de 80 % avec un échantillon de 14 mesures (et donc n-1 degrés de liberté) se trouve en regardant la ligne 14 – 1 = 13 et la colonne 1-80/100 = 0,20. On trouve 1,350.




| v \ P | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,60 | 0,50 | 0,40 | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 636,619 |
| 2 | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 31,598 |
| 3 | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 12,929 |
| 4 | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 8,610 |
| 5 | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 6,869 |
| 6 | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,959 |
| 7 | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 5,408 |
| 8 | 0,130 | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 5,041 |
| 9 | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,781 |
| 10 | 0,129 | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,587 |
| 11 | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,437 |
| 12 | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 4,318 |
| 13 | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 4,221 |
| 14 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 4,140 |
| 15 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 4,073 |
| 16 | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 4,015 |
| 17 | 0,128 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,965 |
| 18 | 0,127 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,922 |
| 19 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,883 |
| 20 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,850 |
| 21 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,819 |
| 22 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,792 |
| 23 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,767 |
| 24 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,745 |
| 25 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,725 |
| 26 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,707 |
| 27 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,690 |
| 28 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,674 |
| 29 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,659 |
| 30 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,646 |
| 40 | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,551 |
| 80 | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,046 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,460 |
| 120 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,041 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,373 |
| ∞ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,291 |